Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Vakblad
voor de
wiskundeleraar

64e jaargang
1988 | 1989
juni

Euclides 9

Wolters-Noordhoff

● Euclides ● ● ● ●

Redactie

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 55,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 37,50; contributie zonder Euclides *f* 30,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Sloep 102, 9732 CE Groningen. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- liefst voorzien van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 52,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 32,00.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86.
Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 8,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-6 63 79.

ISSN 01.65-0394

Inhoud

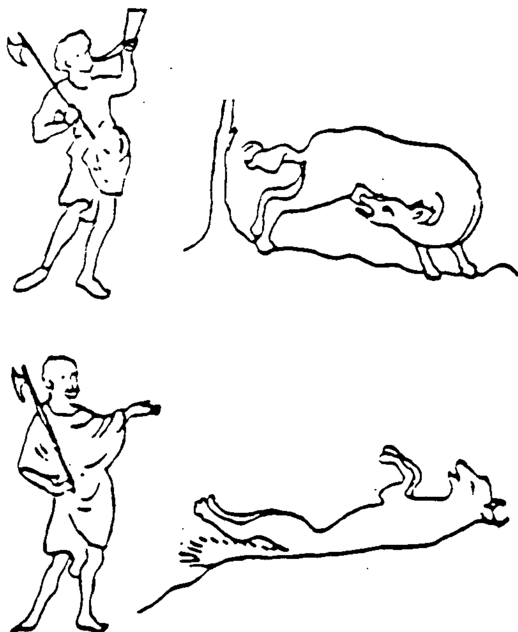


Ons raamplan van de winterversie . . .

▶ WISKUNDE 12-16: zo'n kans krijg je nooit meer.*

G. Schoemaker

Dit zijn twee reconstructies van pentekeningen uit een middeleeuws handschrift 'Der naturen bloeme' van Jacob van Maerlant, de eerste Nederlandse wetenschappelijke encyclopedie, verschenen omstreeks 1270.



Figuur 1

Wat stelt het voor? Werkhypothese: Jager bedreigt wolf. In het tweede plaatje geeft de wolf zich gewonnen, hij laat zich domesticeren, liever bloojan dan doojan.
In de tekst bij de pentekeningen gaat het over Castor de bever. De tekenaar had blijkbaar nog nooit een bever gezien. Wellicht is het afgeknaagde boompje op het eerste plaatje een verwijzing naar de bever. (De tekeningen van leeuwen die Rembrandt maakte voordat hij een echte leeuw had gezien wijken sterk af van zijn latere tekeningen.) De bever terug in Nederland was deze week actueel. Zelfs het NOS-journaal liet het uitzetten van bevers in de Biesbosch zien.
Maar wat doet de bever eigenlijk op het eerste plaatje? In de tekst staat:

'BEVER

Castor dit wort in Latijn
Mach in Dietsch I bever sijn.
Castorium heten hare hoden, *(hoden: testikels)*
Die sijn nutte te velen noden
Ende dats dat mense omme jaghet.
Ende als den bever dan wanhaghet,
So bijt hise af selve te waren;
Dan latenne die jagre varen.'

Blijkbaar moeten we onze werkhypothese herzien. De bever bijt als het hem bang te moede wordt zijn testikels af om zich het leven te redden. De jager laat hem na achterlating van zijn 'hoden' gaan.
Op het tweede plaatje toont de bever als hij 'anderwerf' gejaagd wordt dat hij zijn 'hoden' al kwijt is.

Hoe komt Van Maerlant aan die onzin? Hij vertaalt uit het Latijn wat hij bij Plinius en bij kerkvaders tegen komt. Wat in het Latijn geschreven staat is waar. De betekenis van de verhalen over dieren is vooral een moraliserende les voor de mens. Wie zijn leven dreigt te verliezen moet bereid zijn afstand te nemen van zijn aardse goederen.
Van Maerlant gaat er prat op dat hij niet uit het Frans vertaalt want dat zijn onbetrouwbare bron-

* Tekst van een voordracht, gehouden op de Jaarvergadering/Studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, 29 oktober 1988.

nen. Een minstens even sterk staaltje 'liegt' Van Maerlant (in commissie) over de beer. De berin werpt haar jongen als klompjes vlees nog kleiner dan een muis. Daarna likt ze deze vleesklompjes in de juiste vorm. Ongelikte beer slaat ook nu nog op iemand die de meest elementaire vorming ontbeert. Met deze verhalen geeft Van Maerlant lessen over het leven. 'Hij liegt de waarheid', zoals professor Gerritsen dat noemt.
Voor mij bevestigt dit verhaal een belangrijk kenmerk van wiskunde. Als je met wiskunde bezig bent dan speelt daarin verifiëren, begrijpen, overtuigen een hoofdrol. De verhalen die Van Maerlant in zijn Latijnse bronnen tegenkwam, kon hij niet verifiëren. Het verhaal over de geneeskrachtige werking van bevergeil staat ook nog in onze huidige encyclopedie. Ik kan het niet verifiëren. Na de bever is de muskusrat aan de beurt. Dezelfde stoffen schijnen uitstekend geschikt te zijn in deodoranten. Proeven met proefpersonen, T-shirts met en zonder het vocht afkomstig uit de kliertjes vlak bij de testikels zijn voor mij moeilijk verifieerbaar. Dit soort verifieerbaarheid is van een andere soort dan leerlingen bij het leren van wiskunde tegen komen. Bijna alles wat leerlingen leren bij wiskunde, kunnen ze zelf, in hun hoofd, door redeneren, eventueel met een schema of een tekening, begrijpen.
In de W-folder, het programmaboekje voor deze dag, stond bij de aankondiging van deze lezing deze foto (figuur 2).
Toen ik die stapel drogende planken zag, deed me dat denken aan een oprekking van de doorsnede in verticale richting. Als de factor 2 is dan is de oppervlakte ook 2 keer zo groot. Het doet me ook denken aan $(x,y) \rightarrow (x,2y)$. Later dacht ik aan de oorspronkelijke kromme als $f(x,y)=0$ en de opgerekte kromme als $f(x,y/2)=0$. Dat pakt net anders uit dan je zou verwachten. Maar je kunt het beredeneren. Ik zoek een betrekking tussen de coördinaten van de nieuwe punten van de rand van de opgerekte doorsnede. Ik noem het verband tussen de coördinaten van de randpunten van de oorspronkelijke doorsnede $f(x,y)=0$. Een nieuw punt (x,y) is uit een oud punt $(x,y/2)$ voortgekomen. Ik ben op zoek naar een verband tussen de x en de y van de nieuwe punten. Dan is $f(x,y/2)=0$ een kenmerkend verband tussen de coördinaten van de punten op de nieuwe kromme.



Figuur 2

Al met al een heel andere manier van verifiëren dan in de natuurkunde. Als je twee blaadjes zó vast houdt:) (en je blaast van boven naar beneden dan gaan de blaadjes naar elkaar toe. Dat strijdt met wat je in eerste instantie verwacht. Je kunt het verifiëren door het nog eens te doen. Dan is er nog geen sprake van begrijpen. Daarvoor is een theorie nodig over luchtstromen met als voorbeeld de venturie: begrijpen via een lange weg. Een leerling van mij typeerde eens natuurkundeonderwijs als volgt: 'Het is altijd anders dan je denkt en naarmate natuurkunde moeilijker wordt, geldt dat ook voor die regel'.

Bij figuur 2 stond in het programmaboekje van deze studiedag ook de titel van mijn voordracht. Die titel is voor meer dan één uitleg vatbaar. Ik bedoel er het volgende mee: in de zeventiger jaren is door het IOWO al gewerkt aan leerplanontwikkeling voor de leeftijdsgroep van 12- tot 16-jarigen.



Men vond dat er 'van onderop' ontwikkeld moest worden: van lbo naar vwo. Er bestond toen geen formele opdracht tot wijziging van het leerplan. De resultaten van dit werk vonden hun weg naar de schoolboeken. Maar na klas 2 moest men dan de bocht maken naar het bestaande examen. Nu, zo'n tien jaar later, is de situatie heel anders. Er ligt een opdracht te komen tot een nieuw examenprogramma.

Inmiddels is de professionaliteit op het gebied van leerplanontwikkeling enorm verbreed. Bij auteurs, op lerarenopleidingen en in wiskundesecties van scholen is veel meer ervaring dan in de zeventiger jaren met materiaalontwikkeling en leerplanontwikkeling. Auteurs van schoolboeken zijn best in staat om baanbrekende leerlingenmaterialen te ontwikkelen. Ze zullen dat pas kunnen doen indien er ook een markt voor is. Als de gemiddelde docent in Nederland in staat en bereid is met meer open problemen om te gaan, zullen de boekenschrijvers weinig moeite hebben in hun boeken daarvan gebruik te maken. Het team W12-16 moet als het ware wegen banen voor deskundigheid in den lande om verder te kunnen.

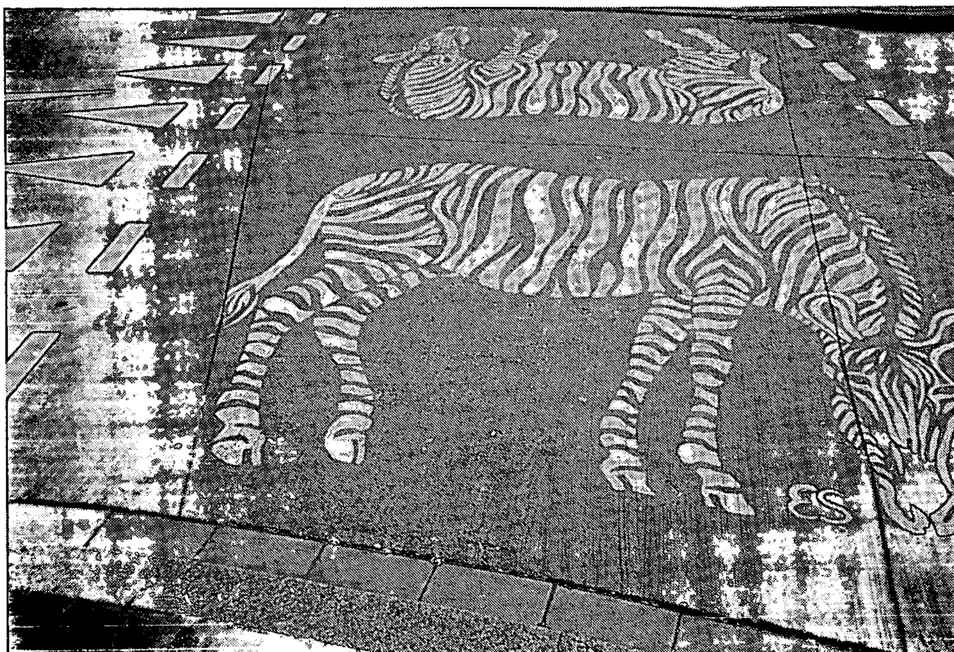
En waarom is er dan nu zo'n unieke kans?

- Er is een grote deskundigheid in het land op diverse plaatsen.
- Er is een team dat de opdracht heeft, onder verantwoordelijkheid van een bestuur met deskundigen die in veel lagen van het wiskundeonderwijs een plaats hebben, wegen te banen.
- Er bestaat in Nederland een uitzonderlijk goede infrastructuur voor wiskundeonderwijs, vergeleken met andere vakken en met de situatie in andere landen.

Die factoren bij elkaar leggen een grote verplichting op het team om er wat van te maken.

Ik geef hier geen argumenten voor de noodzaak van dit project. Over het waarom van deze operatie heb ik eerder geschreven in KOLOM 1 in Euclides 9 van jaargang 87/88.

Een foto van een zebrapad (figuur 3). Het woord zebra keert terug in de vormgeving van de voetgangersoversteekplaats.



Figuur 3

Bij navraag bleek me dat de meeste overstekers, en belangrijker nog automobilisten, ter plekke geen zebra's op de weg zagen maar wel goed reageerden op het zebrapad, waarschijnlijk vanwege de haaietanden. Ik gebruik deze illustratie als beeld:
Het verlangen naar veilige voetgangersoversteekplaatsen leidt tot een conventie waarvan strepen op het wegdek een neerslag zijn. Ik vergelijk dat vrijmoedig met een wiskundig model.
Er is een wiskundig model.
– voetgangersoversteekplaatsen met strepen
Rekenen in dat model leidt tot resultaten
– het woord zebrapad komt in de taal
Die resultaten worden geconfronteerd met de realiteit en beïnvloeden het model.
– teken een zebra op de weg.

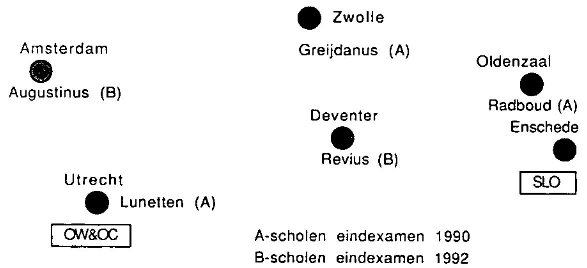
Gelukkig bent u voor de informatieverstrekking over het project W12-16 niet aangewezen op mijn voordracht. Er verschijnen voortdurend artikelen over het werk van de commissie COW en het team W12-16 in Euclides en ook in de Nieuwe Wiskrant. Er verschenen ook artikelen in Uitleg en in dagbladen. Op deze studiedag heeft u de gelegenheid in werkgroepen wat uitvoeriger stil te staan bij nieuwe materialen, de werkwijze bij de nascholing, het gebruik van spreadsheets bij algebra, buitenlandse methodes, het verband met het IBO-project. In mijn presentatie vertel ik een paar hoofdpunten over het project.

De verantwoordelijkheid

Het moet nog maar eens gezegd: W12-16 is een joint venture waarin de wiskundesectie van de SLO en een aantal medewerkers van OW&OC samenwerken. De COW betaalt uit projectgelden ook nog een aantal medewerkers die voor de duur van het project zijn aangesteld. De verantwoordelijkheid voor de produkten ligt bij de COW. OW&OC en SLO hebben de taak de rechten op produkten te beheren. De COW is het bestuur waaronder het hele project ressorteert. In dat bestuur zijn docenten van verschillende schooltypen, lerarenopleiders, het CITO en de NVvWL vertegenwoordigd.

De scholen

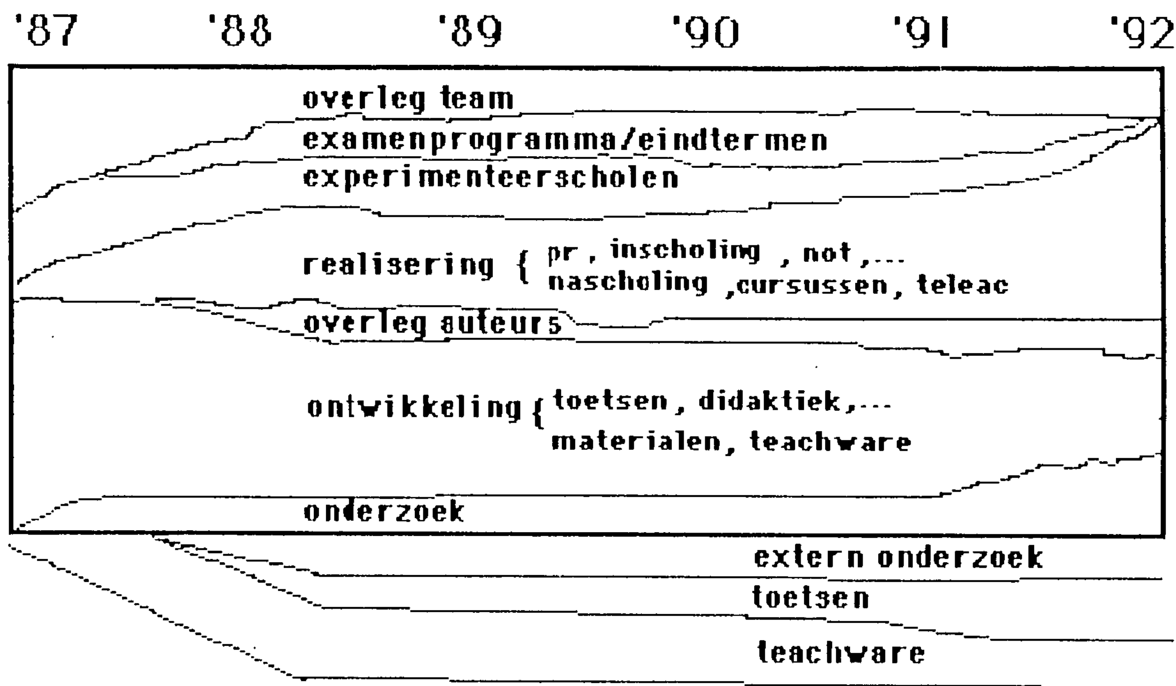
Op het kaartje (figuur 4) ziet u de drie A- en de twee B-scholen.



Figuur 4

Contacten met de scholen onderhouden we vanuit Enschede en Utrecht. Van de leerlingen van de A-scholen die nu in de derde klas zitten, doen de mavo- en lbo-leerlingen in 1990 centraal schriftelijk eindexamen op c- of d-niveau. In deze experimentele situatie komt er een apart examen voor deze drie scholen met open vragen. Wellicht geeft die ervaring aanwijzingen voor de toekomstige examens op grote schaal. Deze leerlingen van de A-scholen hebben nog weinig nieuwe onderwerpen gehad als ze examen doen. Voor de B-scholen ligt dat anders. Van de leerlingen die nu in de brugklas zitten doen een aantal examen op mavo/lbo-c/d-niveau in 1992. Deze leerlingen krijgen een nieuw programma. Met name op de ervaringen met deze leerlingen wordt een advies voor een examenprogramma aan de minister in 1992 gebaseerd.

Het volgende plaatje (figuur 5) geeft globaal aan hoe ik najaar 1987 veronderstelde dat we de tijd moeten besteden.
Uiteraard klopt het schetsje niet meer, hoewel er ook schattingen zijn gemaakt die nu uit blijken te komen, zoals de ruimte die er is voor externe ondersteuning bij de ontwikkeling van teachware. Ik schrijf daarover in KOLOM 5. Waar nog niets van klopt is bij voorbeeld overleg met auteurs. Dat zou al veel verder op gang moeten zijn. Tot nu toe is er een intensief contact tussen COW en uitgevers. In afwachting daarvan zijn de contacten met auteurs vooruit geschoven. Het overzicht suggereert dat ontwikkeling van materialen al in mindere mate kan plaats hebben. Het tegendeel is waar. Weliswaar hoeven we geen complete leergang te maken. Maar we hebben de spullen voor klas drie en vier waarmee we het nieuwe programma profileren nog



Figuur 5

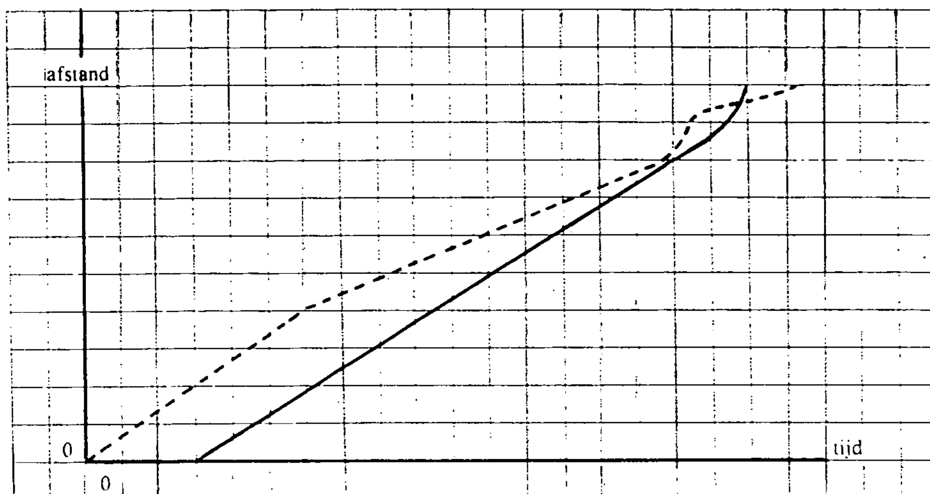
lang niet af, zodat de baan 'ontwikkeling' in het schema eerder moet verbreden dan versmallen.

Sommen voor A-scholen

We maken sommen voor de A-scholen, een bundel van opgaven die aangeven wat voor soort opgaven op een examen – dat kan in een schoolonderzoek schriftelijk dan wel mondeling of met tweetrapstoetsen gebeuren of op een centraal schriftelijk examen – verwacht kunnen worden. 'We' zijn docenten van de A-scholen, leden van het team W12-16 en COW. We zijn nog in het stadium van verzamelen. Op grond van nadere studie willen we uit verzamelde opgaven een selectie maken. Ik geef u een voorbeeld van een som die niet in aanmerking komt voor de bundel maar waarmee ik toch wel een trend kan aangeven.
De volgende som is bedacht door Jacob Perrenet en gebruikt in een onderzoek.[1] (De bijbehorende grafiek is gegeven in figuur 6.)

'Arie heeft een zus die goed kan zwemmen. Ze trainen samen in een zwembad. Zij beweert dat ze over vijf baantjes hem één baan voorsprong kan geven. Dat wil Arie wel eens zien, en ze houden een wedstrijd. Arie begint en als hij bij het eerste keerpunt is, start zij pas. Na vijf banen is de finish. Hieronder zie je een grafiek van hun wedstrijd. Geef een verslag van het laatste deel van de wedstrijd; begin bij het laatste keerpunt.'

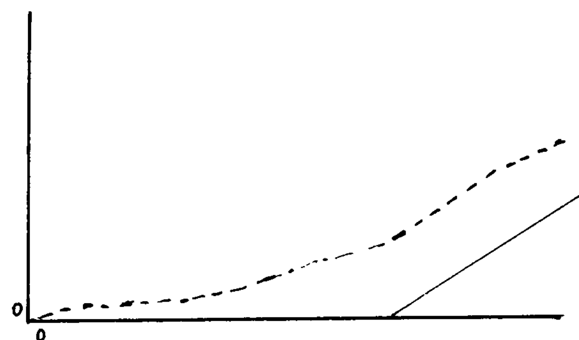
Eerst een paar opmerkingen bij dit vraagstuk:
Wat is precies een baantje? Ik vind dat het eerste baantje van start tot keerpunt loopt. Uit het gegeven dat ze vijf banen zwemmen blijkt in de figuur dat de horizontale strepen in de grafiek op halve baanafstand lopen.
(Deze vraag leidde tijdens mijn lezing tot enige interactie met de aanwezigen. Iemand zei: 'Een baantje is heen èn terug.' Die opvatting is ook mogelijk. In dat geval liggen de keerpunten op de horizon-



Figuur 6

tale strepen. In mijn verdere interpretatie ga ik ervan uit dat een baantje slechts heen of terug is.)
Klopt het idee van banen en bijbehorende keerpunten in de grafiek?
Moeten keerpunten zichtbaar zijn aan kleine stukjes horizontale grafiek?
Op mijn uitvergrote tekening die ik nodig had voor een sheet lijken de horizontale strepen op de afgebakende banen bij zwemwedstrijden. Grafieken geven vaak aanleiding tot conflicten door vormgelijkenis. Aad Goddijn heeft eens een artikel geschreven over 'kaartachtigheid' bij grafieken.[2]
Dit vraagstuk stamt uit het begintijdperk waarin – ook in wiskundesommen – meisjes wel eens slimmer zijn dan jongens of sneller zwemmen. Ik zeg 'begintijdperk' omdat het meisje weliswaar wint maar als 'de zus van Arie'.

Nu een paar mogelijke volgende vragen:
Arie krijgt een baantje voorsprong. In de grafiek zie je dat hij het eerste baantje meteen al hard zwemt. Hij kan dat eerste baantje op z'n dooie akkertje doen en z'n krachten sparen. Pas als hij bij het keerpunt is, duikt zijn zus erin. De grafiek zou er voor het eerste deel van de race zo uit kunnen zien. (Zie figuur 7.)
Laat zien met de grafiek of Arie dan wel zou winnen.
(Reeds bij een hele kleine draaiing van de Arie-



Figuur 7

grafiek tijdens de translatie lukte het de zaal te bedriegen en Arie te laten winnen. Arie verliest echter wederom maar nu met minimaal verschil.)
We wijzigen de wedstrijdregels. Arie gaat op z'n dooie akkertje naar het midden van de baan. Dan pas gaat hij hard zwemmen. Zijn zus duikt erin als Arie het eerste keerpunt aantikt. Schuiven met de Arie-grafiek wijst nu op winst voor Arie. Hoe kan dat?
Een betere wedstrijdregel is: Arie krijgt een voorsprong in tijd. Onderzoek met de grafiek hoeveel tijd Arie voorsprong moet krijgen om een spannende wedstrijd te kunnen verwachten.
De aangeboden grafiek is een afgelegde-weg-grafiek. Maar ook een afstand-grafiek. Vergelijk die twee.

●

Zet eenheden op de assen zodat het over zwemmen kan gaan bij deze grafieken. Zijn de keerpunten op deze schaal zichtbaar te maken?

Opmerkingen bij de extra vragen: Het wordt tijd de werkelijkheid van de wedstrijd er weer eens bij te halen. De getransleerde Arie-grafiek geeft in detail een onbetrouwbare voorspelling van het wedstrijdverloop want Arie en zijn zus reageren op elkaar tijdens het zwemmen.
In het artikel waar de som uit is overgenomen wordt horizontaal mathematiseren toegelicht aan de hand van de zwembadsom. Mijn extra vragen gaan naar verticaal mathematiseren. Je zou de verschuivingen ook kunnen coderen in functievoorschrift. De oorspronkelijke Arie-grafiek als A(t), de verschoven grafiek als $A(t - t_1) + b$. Voor leerlingen zijn verschuivingen als bij sin x en sin $(x - 0.5\pi)$ altijd moeilijk te vatten. Hier heeft $A(t - t_1)$ ook een betekenis, namelijk op tijdstip t noteren waar Arie t_1 eerder was in zijn baan bij de eerste wedstrijd. In deze extra vragen over de zwembadsom teken ik als het ware zebra's op de weg.

Ik wil met deze aanvullingen op de zwembadsom iets duidelijk maken van een visie op ontwikkelen, op wiskundeonderwijs en nascholing.
Ontwikkelen heeft plaats in interactie met vele anderen. Ik had het idee om na te gaan wat er gebeurt als Arie zijn eerste baantje anders zwemt. Anderen kwamen met vragen als: Wat noem je een baantje? Moet je de keerpunten kunnen zien in de grafiek? Maak naast deze grafiek ook eens een tijd-plaatsgrafiek. De ontwikkelaar moet al vroeg opschrijven wat ie met z'n opdracht wil bereiken. Uitstijgen boven 'leuke sommen voor de mensen'. De ontwikkelaar herschrijft op grond van deze botsing van ideeën zijn eerste ontwerp tot een leerlingentekst. Hij legt vast hoe hij tot veranderingen is gekomen. Observaties van wat leerlingen met het materiaal doen leiden niet alleen tot 'wassen van de leerlingentekst' maar ook tot herbezinning van de bedoelingen.
Wiskundeonderwijs gaat over de werkelijkheid. De resultaten van wiskundige activiteiten worden gelegd naast de ervaringen van leerlingen in hun wereld. Dat kan weer leiden tot een andere manier van rekenen met de gegevens. Als er geoefend en geabstraheerd wordt, kan de zin daarvan aangewezen worden. Laten we niet doorslaan naar een soort van culturele revolutie in de wiskunde. De zingeving van wiskunde ligt voor sommige leerlingen al in de ontdekkingsreis door de wereld van getallen. Houd die mogelijkheid er voor deze leerlingen ook in. De vraag naar het zelf kiezen van de eenheden om het grafiekje nog steeds over zwemmen te laten gaan komt voort uit de opvatting dat we leerlingen een redelijk maatbegrip moeten meegeven, over lengte, oppervlakte, ruimte, snelheid.
Nascholing. Belangrijke kenmerken zijn daarbij openbaarheid en collegialiteit. Onze hoofdtaak is nu: zorgen dat er behoorlijke spullen komen waarmee je kunt laten zien (vooral in de klas) dat er wegen geopend worden die leiden tot wiskundeonderwijs dat beantwoordt aan een visie. Direct daaraan koppelen we het vroegtijdig informeren van docenten. Deze twee doelen – openbaarheid en produktie – zijn niet helemaal met elkaar te rijmen. Je schiet meer op als je voorlopig de boel nog dicht houdt en slechts met kleine groepen docenten werkt. Uit het feit dat we tijd steken in het houden van werkgroepen op deze dag moge blijken dat we de openbaarheid en collegialiteit bij nascholing belangrijk vinden. Ik noem ook steeds de collegialiteit omdat we hier vandaag bij elkaar zijn als leden van een 'vak'bond die als collega's discussiëren over nieuwe ontwikkelingen.

Ik geef een aantal trefwoorden over ons werk.

Geïntegreerde wiskundige activiteiten
We willen ruimte maken in het programma voor activiteiten waarbij leerlingen wiskunde bedrijven op een geïntegreerde manier. Een voorbeeld daarvan is 'het weer' waarover u meer te weten kunt komen in de gelijknamige werkgroep. We willen een aantal voorbeelden van dit soort activiteiten maken. We hopen dat docenten straks kunnen kiezen uit voorbeelden die ze naar hun hand kunnen zetten, dan wel geïnspireerd door voorbeelden zelf stukjes geïntegreerde wiskunde aanbieden die ze vinden in de actualiteit. Bij deze materialen

zullen ook manieren moeten worden aangegeven waarop kan worden getoetst.

IBO
Wij maken geen leerplan voor het IBO. In het lbo zitten ongeveer even veel potentiële IBO-leerlingen als in het IBO. Er is een apart vierjarig IBO-project bij de SLO. We prijzen ons gelukkig dat vandaag het IBO-project twee keer een werkgroep draait.

Wiskundewerklokaal
In de experimenteerscholen wordt gewerkt aan de realisering van een wiskundewerklokaal. Zo'n poging heeft uiteraard een sterk materiële kant: Een lokaal reserveren, materialen verzamelen, waaronder ook computerapparatuur.
Per A- en B-school is geïnvesteerd in de aanschaf van computer, viewer, printer op kar en voor overige spullen in een wiskundewerklokaal. De school krijgt de materialen in bruikleen. De school is garant voor verzekering van de spullen, beheer van het materiaal. Men moet ook bereid zijn blijvend uit eigen middelen aankopen te doen voor een jaarlijks bedrag van enige honderden guldens, waarvan in het kader van het project zaken als: speciaal papier, vliegertouw, foto's, een kompas, spiegels enz. gekocht kunnen worden.
Hiermee is slechts een eerste stap gezet. Het gaat erom dat er met behulp van allerhande middelen – van vliegerpapier, pijperagers, lijm, scharen tot en met mogelijkerwijs een plotter en computers met bijbehorende teachware – iets gaat gebeuren waarbij wiskundige kennis geïntegreerd wordt, activiteiten waardoor transfer beoefend wordt naar andere gebieden of activiteiten in het wiskundewerklokaal waardoor werkbladen met opdrachten een goede voorbereiding krijgen. In deze fase van het experiment wordt nog niet de vermenigvuldiging gemaakt waaruit het totaalbedrag voor alle avo- en lbo-scholen rolt. Nu is vooral de vraag aan de orde of allerhande apparatuur en een speciale ruimte een extra impuls kunnen geven aan goed wiskundeonderwijs maar ook of wiskundesecties dat met weinig hulp van buiten vorm kunnen geven.
Heleen Verhage vertelt er meer over in haar lezing van hedenmiddag. Daar komt ook nog een weergave van in Euclides.

COWO
Computer Ondersteuning WiskundeOnderwijs. Met name voor W12-16 en HAWEX. Dit is een door NIVO en in de toekomst via PRINT gefinancierd project. Meer hierover in KOLOM 5.

Meisjes
Bij de keuze van experimenteerscholen bleek het moeilijk wiskundesecties te vinden met daarin een aantal vrouwen. Bij op handen zijnde fusies blijken die vrouwen dan weer als eersten te moeten verdwijnen. Om een vaste inbreng te hebben op het gebied van meisjes en wiskunde hebben we een groep vrouwen, allen wiskundedocent aan diverse scholen, die onderzoek doen ten behoeve van W12-16. Zo worden bij voorbeeld van één ex-vierde klas lhno alle meisjes geïnterviewd over de wiskunde die ze nu nodig hebben.

Allochtonen
We hebben een werkgroep met een deskundige van buiten. Het blijkt dat in deze problematiek nog weinig oplossingen zijn. De studie op het gebied van allochtonen is in Nederland nog nauwelijks in het stadium van verkenning hoe problematisch de positie van allochtonen in het onderwijs is. Allochtonen scoren het hoogst in aantal in onze laagste vormen van voortgezet onderwijs en het allerhoogst bij niet-voortgezet onderwijs. Op één van de experimenteerscholen zitten meer dan 50% allochtonen.

Interactie
We gaan geen koppelverkoop plegen. Natuurlijk hebben leden van het team voorkeur voor bepaalde werkvormen zoals werken in groepen afgewisseld met klassegesprek. We vinden dat onze aanbevelingen niet aan deze werkvorm verkleefd moeten zitten. Wat overeind blijft is wiskundeonderwijs waarin geleerd wordt in een sfeer van interactie.
Bij interactie denkt men vandaag de dag al gauw aan computers. Ik denk dan allereerst aan interactie in de vorm van samenspannen. Programmatuur en leerlingenmaterialen waarbij twee leerlingen uitgedaagd worden samen te spannen op welke wijze ze het computerprogramma alle hoeken van de kamer kunnen laten zien. Uiteraard moet het computerprogramma ook een interactie tussen gebrui-

kers en computer mogelijk maken.
Ik geef een heel ander voorbeeld van interactie. Bij de bakker. Voor me staat in de volle winkel een vrouw. Op het klantenschermpje van het kasregister zie ik f 13,14. De vrouw geeft geld.
De verkoopster vraagt: 'Heeft u er vijftien cent bij?'.
Gezoek in portemonnee. 'Wel een kwartje.'
Gerommel in kassa 'Dat helpt ook'. Verkoopster geeft geld terug.
Klant, aarzelend: 'U geeft een gulden te weinig terug.'
Verkoopster kijkt nadenkend,... 'U heeft gelijk', geeft een gulden. 'Neem me niet kwalijk'.
Klant, vergoelijkend: 'Dat kwam door de veertien'.
Verkoopster: 'Die afgerond werd op vijftien'.
Ook in de klas hebben juweeltjes van interactie plaats. De meeste worden niet opgemerkt. Alleen een beroepsdeformatie zet aan tot dit soort afluisterpraktijken. Tussen u en mij is er nu interactie over het bakkersincident. U vult ontbrekende informatie aan en daardoor kunt u volgen wat er zich afspeelde. U kunt er ook nog een som bij maken. De vrouwen handelden uiterst intelligent. Op papier is de situatie veel moeilijker dan in een winkel waar de geur van vers brood mensen helpt elkaars gedachtengang te volgen.

Raamplan

Het heet nu 'raamplan in aanbouw'. In figuur 8 is de kaft van de zomerversie afgebeeld. In tegenstelling tot de tijd van Van Maerlant volgen de sterk veranderende versies elkaar snel op. Dat moet ook omdat veel mensen zich ermee bemoeien. Tot nu toe het team en de COW. Er wordt gewerkt aan een herfstversie voor de VALO-conferentie eind november. Daarin staan naast opvattingen over wiskundeonderwijs en uitspraken over het voorlopige programma in de experimenteerscholen ook lange lijnen. Dat zijn leerstoflijnen voor meetkunde, rekenen, algebra en functies en een rest die we voorlopig informatie en modellen noemen. Wij komen vaak aanzetten tegen met leuke voorbeeldjes maar daarmee maak je geen wiskundeprogramma. De lange lijnen moeten de samenhang geven. Ook al

RAAMPLAN in aanbouw

zomer 1988

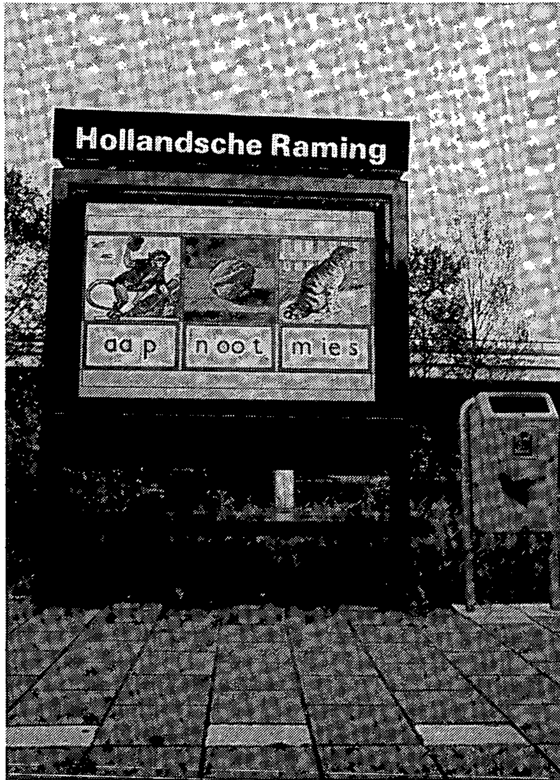


W 12 16

Figuur 8

schrijf je de samenhang op in lange lijnen dan moet toch naar onze mening het wiskundeonderwijs een geïntegreerd beeld geven aan de leerling. De lange lijnen zijn er voor de docenten teneinde een overzicht te hebben van wat er komt, hoe de verticale en horizontale opbouw is. Ook leerlingen moeten door de losse sommetjes heen een overzicht krijgen van wat ze geleerd hebben. De kritiek op veel materialen, met name voor de zwakste leerlingen, is dat het voor de leerlingen – en de docent – beleefd wordt als hapsnapperig, van 'gut' naar 'wat leuk'. In dit voorjaar kon u op de stations de ramen zien zoals in figuur 8. Wellicht is u ook opgevallen dat daarna op deze ramen platen van aap, noot en Mies verschenen. Ik heb een tijd gedacht dat dit de inleiding was tot een afsluitende slogan, zoiets als

'Zo is het allemaal begonnen, doet u nog aan lezen?' om de verkoop van boeken te stimuleren. Het was echter een reclame op metaniveau. Het betekende 'Op deze plaatsen kunt u adverteren'. Aap, noot en Mies zijn open plaatsen. Daarvan kan de adverteerder op zijn eigen wijze gebruik maken. Wij kunnen dat beeld ook gebruiken bij het raamplan. Binnen de kaders van het raamplan kan men eigen invullingen maken. Ons raamplan van de winterversie zou er aan de buitenkant zo uit kunnen zien:



Figuur 9

Voor die tijd moet er nog wel wat gebeuren. Toetsing aan meningen van docenten, toetsing aan buitenlandse programma's.
Na totstandkoming van de winterversie heeft een vaststelling plaats door de COW in de maartvergadering. Daarna gaat het stuk naar de staatssecretaris en tevens in de publiciteit. Wellicht zal dan ook een aantal personen (in binnen- en buitenland) expliciet om hun reactie gevraagd worden.

Noten

1. J. Meijer, J. Chr. Perrenet, F. Riemersma, *Leren probleemoplossen in het wiskundeonderwijs*, Pedagogische Studiën 1988 (65).
2. Aad Goddijn, *Lijngrafieken in de Gansstraat*, Wiskrant 11, maart 1978.

Mededelingen

WIT Conferentie

Op vrijdag 29 en zaterdag 30 september 1989 wordt in het Leeuwenhorst Congres Centrum te Noordwijkerhout de conferentie Wiskundeles en Informatie-Technologie (WIT) gehouden.
Het doel van deze conferentie is: voorlichting geven over, tonen van en discussiëren over de nieuwste mogelijkheden van computers en andere nieuwe media voor de wiskundeles in het voortgezet onderwijs.
De organisatie hoopt op een honderdtal wiskunde-docenten die beide dagen kunnen vrijmaken voor de WIT-conferentie; daarboven zijn natuurlijk ook andere belangstellenden welkom.
De deelnemersprijs is *f* 150,– per persoon.
Docenten die voor het verkrijgen van verlof van de schoolleiding op vrijdag 29 september een persoonlijke uitnodiging wensen, kunnen dit kenbaar maken bij de organisatie:
Vakgroep OW&OC, t.a.v. mw. E. Hanepen, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht, 030-61 16 11.
Nadere informatie eveneens op dit adres.

Nascholing voor wiskundeleraren

De Rijksuniversiteit Leiden en de Technische Universiteit Delft verzorgen in het cursusjaar 1989-1990 de volgende nascholingsactiviteiten voor wiskundeleraren in het voortgezet onderwijs:
- Computer in het wiskundeonderwijs
- Computer in de onderbouwwiskunde
- Computer in de bovenbouwwiskunde
- Meetkunde met de computer
- Wiskunde voor wiskunde-docenten
- HAWEX: wiskunde A en wiskunde B op het havo
- HAWEX-kort

Inlichtingen over deze en andere nascholingscursussen van de RU Leiden, de TU Delft en de EU Rotterdam bij:
mw. I. C. Leenstra, Org. Coördinator Nascholing, Rijnsburgerweg 146, 2333 AJ Leiden, 071-27 40 16.

● Boekbeschouwing ●

▶ Facets of Seventeenth Century Mathematics in the Netherlands

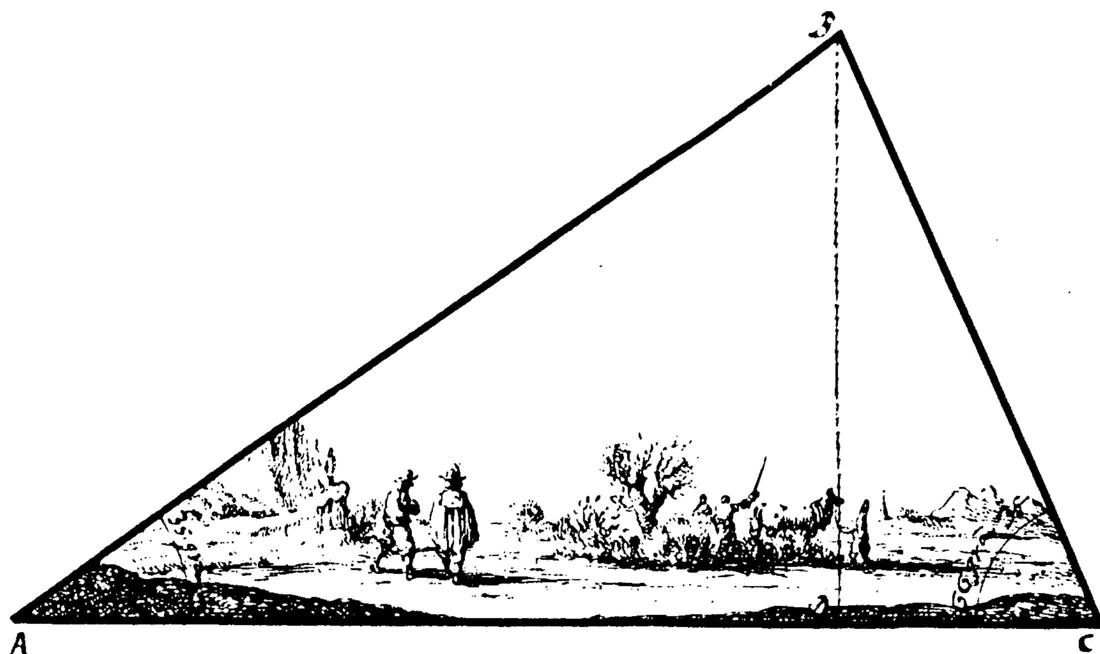
P. G. J. Vredenduin

Op 16 september 1987 is Jan van Maanen gepromoveerd aan de Rijksuniversiteit te Utrecht. Zijn proefschrift is een opmerkelijke bijdrage op het gebied van de geschiedenis van de wiskunde, die velen zal interesseren.

Om de lezer in de probleemstelling te oriënteren, schetst hij eerst hoe in de eerste helft van de 17e eeuw de Nederlanden een tijd van economische bloei doormaakten. Gevolg was een grote belangstelling voor de wiskunde met het oog op de toepassingen. Landmeten, aanleg van fortificaties, navigatie en daarmee ook astronomie en cartografie speelden een belangrijke rol. Aan het einde van de eeuw zakte de economie in en daarmee verminderde de belangstelling voor wiskunde al spoedig.

Naast beoefening van de wiskunde met het oog op de toepassingen ontstond ook belangstelling voor de wiskunde als autonome wetenschap. Hiermee komen we tot het centrale onderwerp van de dissertatie. Enkele wiskundigen, die omstreeks 1650 werkzaam waren in de Nederlanden, worden hierbij speciaal voor het voetlicht gebracht, namelijk Frans van Schooten Jr., Hendrick van Heuraet, Christiaan Huygens en Johannes Hudde. Natuurlijk waren dit niet de enige belangrijke wiskundigen uit deze tijd. Maar getrouw aan de term 'Facets' in de titel worden andere, zoals Simon Stevin en Snellius, wel genoemd maar niet speciaal besproken.

Sommige wiskundigen hadden in deze tijd belangstelling voor het werk van Descartes. Zoals bekend zijn Fermat en Descartes de ontwerpers geweest

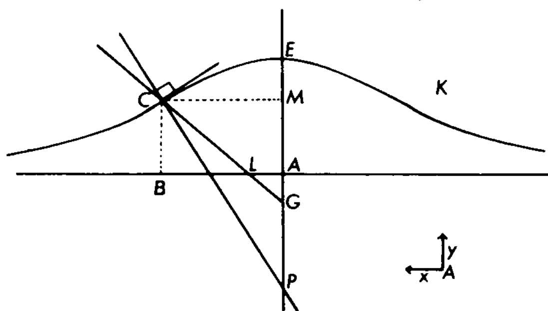




Frans van Schooten Jr., ca. 1615-1660

van de analytische meetkunde. Maar Descartes heeft daarbij wel een speciale rol gespeeld. Bij de voorgangers van Descartes stelde een letterfactor een lijnstuk voor, een produkt van twee letterfactoren een oppervlakte, een produkt van drie factoren een inhoud. Reeds in de Griekse Oudheid was dit gebruik. Gevolg was, omdat men geen lengten bij oppervlakten kon optellen, dat men uitsluitend kon werken met formules die homogeen zijn. $ab + a$ was uit den boze; het moest $ab + ac$ of $ab + a^2$ zijn.
Descartes heeft dit taboe doorbroken. Hij koos een lijnstuk e als lengteëenheid. Zijn nu a en b lijnstukken, dan kan men wegens $e : a = b : ab$ door middel van de constructie van de vierde evenredige ab door een lijnstuk voorstellen. Bovendien accepteerde Descartes soms negatieve wortels van een vergelijking en verbond er een meetkundige voorstelling mee. Zijn Geometrie (1637) was een machtig stuk werk, dat echter door zijn baanbrekend karakter in die tijd wel buitengewoon moeilijk leesbaar was.[1] Voor de kleine groep wiskundigen die tegen de moeilijkheden opgewassen waren, was het dan ook een uitdaging zich in het werk van Descartes te verdiepen. Dit was voor hen mede aanleiding te trachten zijn werk uit te breiden en met behulp van zijn methode verwante problemen te onderzoeken. Ik wil hiervan een tweetal voorbeelden geven die in het proefschrift uitgewerkt zijn.

Gegeven een conchoïde K (figuur 1) met vergelijking $x^2y^2 = (c^2 - y^2)(y + b)^2$ en daarop een punt $C(x_0, y_0)$. Gevraagd de normaal op de kromme in C. (Hudde)



figuur 1

We beschouwen de cirkels door $C(x_0, y_0)$ die hun middelpunt $P(0, -v)$ op de y-as hebben. De vergelijking van zo'n cirkel is

$$x^2 + (y + v)^2 = s^2$$

We moeten nu v en s zo bepalen dat het stelsel

$$x^2y^2 = (c^2 - y^2)(y + b)^2 \qquad (1)$$
$$x^2 + (y + v)^2 = s^2 \qquad (2)$$

een dubbele oplossing (x_0, y_0) heeft.
Tot zover is de methode van Descartes op de voet gevolgd. Hudde gaat nu verder door gebruik te maken van een door hem gevonden stelling, die het rekenwerk vergemakkelijkt. Deze stelling luidt: als een vergelijking een dubbele wortel y_0 heeft en we vermenigvuldigen zijn coëfficiënten met opvolgende termen van een rekenkundige rij, dan ontstaat een nieuwe vergelijking die weer als wortel y_0 heeft.[2]
Eliminatie van x uit (1) en (2) geeft:

$$\frac{b^2c^2}{y^2} + \frac{2bc^2}{y} + (c^2 - b^2 + v^2 - s^2) + $$
$$+ (-2b + 2v)y = 0$$

We vermenigvuldigen de coëfficiënten resp. met

$$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1$$

en krijgen

$$\frac{-2b^2c^2}{y^2} - \frac{2bc^2}{y} - 2by + 2vy = 0$$

Deze vergelijking heeft een wortel y_0. Substitueer y_0 voor y, los v op en het middelpunt $(0, -v)$ van de cirkel is bekend. Daarmee is ook de normaal gevonden.

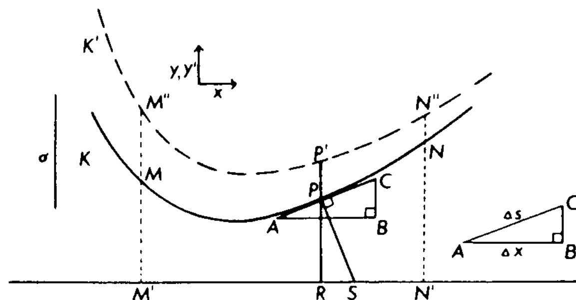


Johannes Hudde, ca. 1628-1704

Een nieuw probleem is het volgende. Gegeven een algebraïsche kromme K (figuur 2) met vergelijking $f(x,y) = 0$ en twee punten M en N op deze kromme. Gevraagd de lengte van de boog MN. (Van Heuraet)

P is een punt op boog MN (zie de figuur). De lengte van de normaal PS kan berekend worden met de hierboven geschetste methode. Verder is een willekeurig lijnstuk gekozen met lengte σ. Een nieuwe kromme K' wordt gedefinieerd door middel van

$$\frac{P'R}{\sigma} = \frac{PS}{PR} \qquad (1)$$



figuur 2

We brengen nu het probleem van de rectificatie van K terug tot de kwadratuur van K' door te bewijzen dat

$\sigma \cdot$ lengte boog MN = opp. $M'M''N''N'$

Dit geschiedt als volgt. Teken de raaklijn AC in P aan K. Teken $\triangle ABC$ en noem $AB = \Delta x$ en $AC = \Delta s$. Nu is $\triangle ABC \backsim \triangle PRS$ en dus

$$\frac{PS}{PR} = \frac{AC}{AB} = \frac{\Delta s}{\Delta x} \qquad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt

$$\frac{P'R}{\sigma} = \frac{\Delta s}{\Delta x}$$

en dus

$\sigma \Delta s = P'R \cdot \Delta x$

Kies op K een serie consecutieve punten tussen M en N. Laat P zo'n serie punten doorlopen. Sommatie geeft dan

$$\sum_P \sigma\, \Delta s = \sum_P P'R \cdot \Delta x$$

of

$$\sigma \sum_P \Delta s = \sum_P P'R \cdot \Delta x$$

Limietovergang levert

$\sigma \cdot$ lengte boog MN = opp. $M'M''N''N'$

Om te laten zien dat deze methode ook praktisch uitvoerbaar is, geeft Van Heuraet als voorbeeld de kromme K met vergelijking $y^2 = \frac{x^3}{a}$.

De kromme K' wordt dan een parabool. Kwadratuur van de parabool was reeds sinds Archimedes bekend. En daarmee was rectificatie van $y^2 = \frac{x^3}{a}$ gelukt.
Verrassend is steeds weer hoe men zich in die tijd met primitieve hulpmiddelen wist te redden en hoe anderzijds de differentiaal- en integraalrekening al haast voor het grijpen lag.

Ten slotte besteedt Jan van Maanen nog bijzondere aandacht aan John Pell. Waarom is me, eerlijk gezegd, niet geheel duidelijk geworden. Pell is geen Nederlander maar een Engelsman die een twaalftal jaren in Nederland gewerkt heeft. Tot de grote wiskundigen behoort hij niet. Velen zullen gehoord hebben van de vergelijking van Pell ($ax^2 + 1 = y^2$ met x, y en a positief geheel), maar de schrijver vertelt ons dat John Pell met deze vergelijking niets te maken had. Pells glansrol is de weerlegging van de methode van Longomontanus waarmee deze meende de kwadratuur van de cirkel tot een goed einde te brengen. Het verhaal hierover is kostelijk en je leest het als een detectiveroman.
Pell kwam in de zaak van Willem Jansz. Blaeu, boekhandelaar en uitgever te Amsterdam. Pell vond in deze boekhandel een exemplaar van een schriftuur van Longomontanus aangaande de kwadratuur van de cirkel. Hij bemerkte dat de inhoud onjuist was, schreef een weerlegging van twee bladzijden. Hij wist Blaeu te bewegen deze weerlegging uit te geven door aan exemplaren van het werkje van Longomontanus, dat 72 bladzijden besloeg, twee pagina's toe te voegen met dezelfde layout en genummerd 73 en 74. Blaeu voegde deze pagina's toe aan de exemplaren van het boekje van Longomontanus die hij in voorraad had. Pell kreeg een aantal exemplaren ter beschikking, verspreidde deze onder zijn geestverwanten en zond ook een exemplaar aan Longomontanus. Hoewel Pell evident gelijk had, was Longomontanus niet te overtuigen. Dan ontspint zich de prestigestrijd tussen Pell en Longomontanus waarin Pell niet rust voordat hij Longomontanus zover gekregen zou hebben ongelijk te bekennen. Of dit ooit gebeurd is, vermeldt de historie niet. Wie nieuwsgierig is naar verdere details moet het boek zelf maar lezen.

In een slothoofdstuk geeft Van Maanen nog een inventarisatie van alle manuscripten betreffende het onderwerp van zijn dissertatie die te vinden zijn in de universiteitsbibliotheek van Leiden, voorzover deze geschreven zijn in westerse talen, en een overzicht over de overige geraadpleegde bronnen. Zijn onderzoekingen hebben mede geleid tot publikatie van enkele bronnen die te voren nooit aandacht gekregen hebben.
Het boek is belangwekkend en imponerend. Ik kan me dan ook voorstellen dat collega's die belangstelling hebben voor de historie, lust krijgen deze dissertatie zelf te lezen. Het boek is niet in de handel, maar is verkrijgbaar bij Antiquariaat Theo de Boer, Sassenstraat 70, 8011 PD Zwolle, tel. 038-21 75 24. Prijs *f* 40,–.

Noten

1 Wie zich nader in de meetkunde van deze tijd wil verdiepen, raad ik aan aan te schaffen: The Geometry of René Descartes, Dover, ISBN 0-486-60068-8. Men vindt hierin een volledig facsimile van de oorspronkelijke Franse tekst en daarnaast een Engelse vertaling. Opmerking. Descartes schreef Geometrie zonder accenten; vrijwel iedereen die hem citeert schrijft niettemin: Géométrie, met accenten derhalve (redactie).
2 Nadere informatie over deze stelling vindt men in: A. W. Grootendorst, Johan Hudde's 'Epistola Secunda de Maximis et Minimis', Nieuw Archief voor Wiskunde, vierde serie deel 5 nr. 3, nov. 1987.

● Werkblad ●

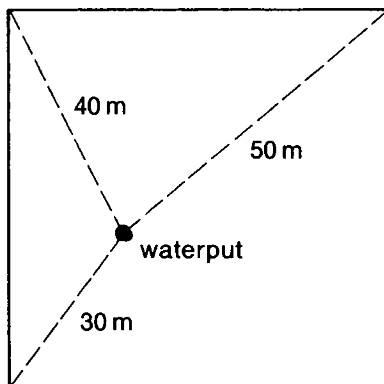


▶ De zwemwedstrijden

Vier vriendinnen doen mee aan de plaatselijke zwemwedstrijden, waarvan het inschrijvingsgeld naar een goed doel gaat.
Er zijn vier onderdelen (vrije slag, schoolslag, vlinderslag en rugslag), en elk van de vier vriendinnen zal aan één onderdeel meedoen.
Amanda beheerst de vrije slag, de schoolslag en de vlinderslag, Jane beheerst de vrije slag en de schoolslag, Ellen beheerst de vrije slag en de rugslag, en Ruth beheerst de rugslag.

a Wie doet mee aan welk onderdeel?
b Als Ruth haar zwemkunst verbetert en ook de vlinderslag zou kunnen nemen, ontstaan er nieuwe mogelijkheden. Vind nu twee andere keuzen die de vriendinnen voor de vier onderdelen zouden kunnen maken.
c Als Ruth ook nog de vrije slag leert, op hoeveel manieren kunnen de vier vriendinnen dan de vier onderdelen kiezen?

● Werkblad ●



▶ De binnenplaats van het klooster

Een oud klooster is gebouwd om een vierkante binnenplaats. Op deze binnenplaats bevindt zich een waterput.
De afstand van de waterput tot drie opeenvolgende hoeken van de binnenplaats is respectievelijk 30 m, 40 m en 50 m.
Hoe groot is de oppervlakte (in m^2) van de binnenplaats?

Als de afstanden tot de drie hoekpunten niet 30 m, 40 m en 50 m zouden zijn, maar 40 m, 30 m en 50 m (in deze volgorde), zou dan de oppervlakte van de binnenplaats groter of kleiner zijn dan in het vorige geval?

Brian Bolt, Mathematical Activities

▶ Wiskunde-onderwijs in verandering

Kees Hoogland

Inleiding

Het 'International Congress on Mathematical Education' (ICME) is een vierjaarlijks gebeuren, waar mensen van over de hele wereld bijeenkomen om van gedachten te wisselen over wiskunde-onderwijs. In augustus 1988 vond het zesde congres in deze serie plaats in Boedapest.
Bijna alle onderwerpen die met wiskunde-onderwijs te maken hebben komen aan bod in de verschillende actie- en themagroepen. Als wiskundeleraar ging mijn speciale aandacht uit naar voordrachten die mogelijke veranderingen en vernieuwingen van het wiskunde-onderwijs behelsden.
Als altijd werd ik ook hier weer verrast door wat ik voel als een splitsing der geesten. Enerzijds mensen die redeneren vanuit de visie dat het kennisnemen van wiskunde als wetenschap een belangrijke geestesvorming is en dat wiskunde-onderwijs daarop gericht moet zijn, en anderzijds mensen die redeneren vanuit de gedachte dat wiskunde een onderdeel is van de wereld om ons heen en dat wiskundeonderwijs moet bijdragen tot een meer maatschappelijke vorming.
Daarnaast bespeurde ik enkele wereldwijde tendensen in de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs: een real-life tendens en een technologische tendens. Deze tendensen hebben uiteraard invloed op de gangbare visies op wiskunde-onderwijs.

Wiskunde, wetenschap

Wiskunde wordt door velen gezien als een eerbiedwaardige wetenschap met een zeer lange traditie. Deze wetenschap heeft een heel duidelijk omschreven wetenschapskader, waarin de axiomatische opbouw, de zuiverheid en de logica van het wiskundige bouwwerk centraal staan.
Vooral in de westerse en westers-georiënteerde landen wordt of werd het schoolvak wiskunde daar direct van afgeleid. Leerlingen moeten als het ware dezelfde paden volgen als de illustere voorgangers van de wetenschap wiskunde, honderden jaren vóór hen. Het wiskunde-onderwijs is dan vooral structuralistisch van aard.

Wiskunde, vorming

Belangrijkste uitgangspunt van de andere visie is dat wiskunde iets is dat deel uitmaakt van de wereld om ons heen. In het dagelijkse leven en in de wereld om ons heen wordt in toenemende mate gebruik gemaakt van getallen, formules en grafieken, om allerlei zaken aan te tonen, te beargumenteren en om beslissingen te nemen. Ieder mens zou een bepaalde mate van kennis moeten bezitten om hiermee enigszins kritisch te kunnen omgaan.
Een verhelderende opdracht: tel op de voorpagina van een willekeurige krant het aantal getallen dat gebruikt wordt om informatie te verschaffen. De uitkomst zal u verbazen.

Matheracy

Een aardig voorbeeld is dat in sommige voordrachten een woord opduikt als 'matheracy', als tegenhanger van 'literacy', geletterdheid.De noodzaak van het kunnen lezen en schrijven om de omringende wereld beter te kunnen begrijpen is een wereldwijd aanvaard idee. Het idee dat een vergelijkbare bagage aan wiskundig denken ook een menselijk

gemeengoed moet zijn, is veel minder wijd verspreid. Ook in Nederland is er geen traditie in die richting. Hier wordt nog steeds gepraat over wiskundeknobbels en niet geschikt zijn voor wiskunde. Het verplicht stellen van wiskunde zal dat niet zomaar veranderen.

De real-life tendens

Een veel voorkomende tendens bij curriculumontwikkelingen in diverse landen is de zogenaamde real-life tendens: wiskunde-onderwijs moet stoelen op de wereld om ons heen, wiskunde moet ontwikkeld worden vanuit contexten, toepassingen en toepasbaarheid vormen een belangrijk onderdeel van het wiskunde-onderwijs. Deze tendens is een direct uitvloeisel van de visie dat wiskunde-onderwijs een onderdeel is van maatschappelijke vorming.
Deze benadering is relatief jong en heeft daardoor het probleem op te moeten boksen tegen de meer gevestigde, i.e. de meer structuralistische ideeën over wiskunde-onderwijs. Argumenten die genoemd worden zijn vaak van pedagogische aard. Een meer realistisch wiskunde-onderwijs staat dichter bij de leerlingen en is daardoor motiverender.
Andere argumenten liggen dichter bij de geschetste visie. Men vindt het belangrijk dat leerlingen leren om te gaan met de complexe wereld om ons heen. Een wereld, waarin nu eenmaal veel getallen en formules voorkomen.

Wiskunde, derde wereld

De derde wereld-landen nemen wat dit aspect betreft een zeer aparte plaats in. Ook daar is wiskunde-onderwijs snel in opmars. Daar is een opvallend gevecht gaande tussen mensen die vinden dat eerst maar eens goed en degelijk structuralistisch wiskunde-onderwijs verspreid moet worden voordat aan toepassingen gedacht moet worden. Zo zijn wij tenslotte ook groot en belangrijk geworden.
Anderen hebben het idee dat juist de derde wereld gebaat is bij een wiskunde-onderwijs dat voortvloeit uit de omringende wereld om zo een manier te krijgen waarmee de omringende wereld beter begrepen en gebruikt kan worden. De wiskunde van het meten, van de markt en van de speelplaats.

Technologische ontwikkelingen

Een ander belangrijk aspect bij toekomstige curriculumveranderingen is een mogelijke integratie van allerlei technologische ontwikkelingen.
De zakrekenmachine is op de scholen inmiddels gemeengoed, maar helaas nog vrijwel nergens behoorlijk geïntegreerd in het wiskunde-onderwijs. Menige school worstelt met het probleem wanneer er van de rekenmachine gebruik gemaakt mag of moet worden. Vaak wordt het begin van daadwerkelijk gebruik, mits niet strikt verboden door de leraar, bepaald door de leerlingen en niet door het curriculum.
Inmiddels begint natuurlijk ook de computer zijn opmars. Allerlei mogelijkheden om de computer een rol te laten spelen bij het wiskunde-onderwijs werden in Boedapest getoond.
Men zou verwachten dat het gebruik van de computer het wiskunde-onderwijs van een structuralistische kant zou doen opschuiven naar een meer toegepaste kant. Dit blijkt zelden het geval te zijn. Heel vaak, misschien te vaak, is de computer slechts een hulpmiddel om een veel eerder vastgesteld curriculum ten uitvoer te brengen, zonder dat de computer ook inhoudelijke veranderingen bewerkstelligt.

Technologie en curriculum

Er zijn prachtige computerprogramma's waarmee leerlingen kunnen oefenen met rechte lijnen en parabolen, met ingewikkelde breuken, met merkwaardige produkten en dergelijke. Mij bekruipt dan het gevoel dat het eigenaardig is om een zo krachtig hulpmiddel als de computer te gebruiken voor allerlei oefeningen die juist uitgaan van het feit dat bij wiskunde-onderwijs geen hulpmiddelen voorhanden zijn. Onderwerpen die veel vanzelfsprekender bij computergebruik horen zijn meestal nog niet in het curriculum opgenomen. Te denken valt aan benaderingen, iteraties, spread-sheets bij statistiek, besliskunde, grafische weergaves en dergelijke.

Een niet te onderschatten factor is natuurlijk ook dat het uitkristalliseren van een curriculum een kwestie van jaren is, terwijl de implementatietijd van technologische ontwikkelingen vaak een kwestie van maanden is. Een blijvende achterstand is niet te vermijden.

Verschuiving?

Conclusies uit het voorgaande kunnen zijn dat de real-life tendens het wiskunde-onderwijs langzaam maar zeker doet opschuiven naar de vormende kant.
Technologische ontwikkelingen hebben een veel ondoorzichtiger effect op de richting van de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs. De toenemende bereikbaarheid van steeds kleinere en krachtigere computers zal uiteindelijk toch het wiskunde-onderwijs doen veranderen. In welke richting dat gebeurt zal vooral afhangen van de kwaliteit van onderzoek naar zinvolle integratie.

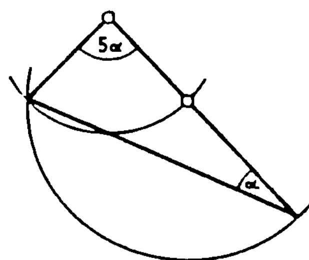
Wat mist er toch?

Zelf heb ik in de dagelijkse lespraktijk vaak het idee dat het huidige wiskunde-onderwijs ook een belangrijke selecterende functie heeft. Wel of geen wiskunde in je pakket heeft consequenties voor de waarde van je diploma. Veel opleidingen stellen wiskunde verplicht zonder dat aanwijsbaar is welke inhoudelijke onderdelen van de schoolwiskunde nu nuttig zijn voor de desbetreffende studie.
Op het hele congres kon ik geen bijdragen vinden die een verband legden tussen de inhoud van het wiskunde-onderwijs en een wel of niet selecterende rol van het wiskunde-onderwijs.
Heb ik niet goed gezocht of wordt er gewoon niet (meer) gepraat over welk soort wiskunde ten dienste staat van een selecterend onderwijsbestel en welk soort misschien niet?

Denkopgaven

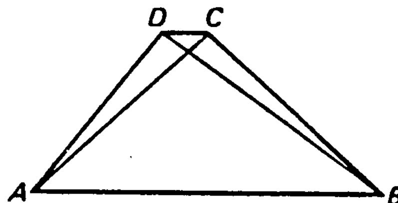
9a

Een driehoek. Vanuit een hoekpunt wordt de kleinste zijde omcirkeld; de cirkel snijdt een tweede zijde in een punt dat op de middelloodlijn van de derde zijde ligt.
Hoe groot is hoek α?



9b

Een vierhoek $ABCD$.
$AB = 210$, $AD = 125$, $BD = 168$, $BC = 145$.
Is vierhoek $ABCD$ een trapezium?



Antwoorden Denkopgaven op blz. 284.

Korte programma's zijn om in te kijken

Bertus van Etten

In het eerste nummer van Euclides van jaargang 64 nodigt de redactie ons uit om korte programma's te schrijven. Dat is voor mij een uitdaging. Kun je – in GWBasic – zo programmeren dat er een kort programma ontstaat, waarmee je je wiskundeles kunt ondersteunen.
Ik zie naast voordelen ook gevaren van het gebruik van korte programma's tijdens wiskundelessen. Een voordeel is dat een leraar voor zijn specifieke situatie een programma schrijft. Hijzelf of zijn leerling zal de gebruiker zijn. Dat stelt minder zware eisen aan een programma. Er hoeft minder gelet te worden op invoerbeveiliging, scherm-lay-out e.d. Daar staat tegenover dat het deel van de programmatekst waar de wiskunde aan de orde komt voor leerlingen snel gevonden en begrepen moet worden. Aan leerlingen mag daarbij niet de eis gesteld worden dat zij de programmataal machtig zijn. Ik stel me ook voor dat de wiskundeleraar (op dat moment) wiskunde wil geven en geen programmeeronderwijs.
Daarom is volgens mij 'korte programma's' een verkeerde naam. Want de kortheid is niet het eerste criterium dat je hanteert wanneer je een dergelijk programma schrijft. Je probeert een programmatekst te schrijven waarvan je veronderstelt dat het lezen en veranderen door de leerling het wiskunde leren ondersteunt. De meeste programma's zullen dan relatief kort zijn, omdat kortheid ook een didactische eis is.
Inkijkprogramma's zijn bedoeld om er beter wiskunde mee te (laten) leren. Het lijkt een noodzakelijk kwaad dat leerlingen geconfronteerd worden met (lastige) Basic. Om dat te voorkomen moet een inkijkprogramma zo geschreven worden dat het bijbehorend wiskundig probleem goed wordt ondersteund, terwijl details van de programmeertaal niet begrepen hoeven te worden.
Ook het aanbrengen van veranderingen moet met minimale programmeerkennis mogelijk zijn. De veranderingen zullen zich beperken tot de wiskundige probleemstelling.

Dit stelt m.i. de volgende eisen aan de programma's:
– het programma is opgesplitst in verschillende subroutines. Van elke subroutine is door naamgeving duidelijk wat het effect zal zijn. De meeste subroutines mogen voor de leerling een 'black box' blijven. (Helaas kunnen we in GWBasic de subroutines niet onzichtbaar maken.)
– Het programma begint met het hoofdprogramma waarin een aantal subroutines wordt aangeroepen. Door naamgeving moet duidelijk zijn in welke subroutine het essentiële staat voor het wiskundeprobleem.
– Duidelijke namen voor variabelen moeten het leerproces ondersteunen.
– het deel van het programma dat wiskundig wel van belang is moet zeer goed leesbaar zijn voor de leerling.
– De Basic-opdrachten die leerlingen moeten snappen zijn beperkt tot: REM, LET, FOR ... NEXT, WHILE ... WEND, IF ... THEN ... ELSE ..., GOSUB, INPUT, PRINT, LIST en RUN

Inkijkprogramma's stellen hoge didactische eisen aan de programmeur. De leraar die inkijkprogramma's schrijft moet zelf gedisciplineerd programmeren, terwijl de programmeertaal Basic deze discipline niet ondersteunt.
Als voorbeeld heb ik twee bekende korte programma's geschreven in een stijl zoals ik bedoel. Het eerste voorbeeld is het overbekende programma 'groei'.

```
10  REM groei
20    GOSUB 400: REM invoer gegevens
30    FOR JAAR = 1 TO DUUR
40      GOSUB 600: REM doe een berekening
        en druk resultaat af
50    NEXT JAAR
90  END

400 REM invoer gegevens
410   CLS
420   LOCATE 3: INPUT"Kapitaal:   ",
      KAPITAAL
430   LOCATE 5: INPUT"Percentage: ",
      PERCENTAGE
440   LOCATE 7: INPUT"Duur:       ",
      DUUR
450   PRINT
460   PRINT "Jaar", "Rente", "Kapitaal"
470   PRINT
490 RETURN

600 REM doe een berekening en druk resultaat af
610   LET RENTE = KAPITAAL *
                  PERCENTAGE / 100
620   LET KAPITAAL = KAPITAAL +
                     RENTE
630   PRINT JAAR, RENTE, KAPITAAL
690 RETURN
```

Met dit programma krijg je antwoord op de vraag hoe groot je kapitaal is wanneer je het uitzet tegen een bepaald percentage, gedurende een aantal jaren. Met 'trial and error' is ook antwoord te vinden op vragen zoals:

– na hoeveel jaar is mijn kapitaal verdubbeld?
– tegen welk percentage moet ik het kapitaal uitzetten om verdubbeling te krijgen in 12 jaar?

Met enige aanpassing van het programma kan berekend worden hoeveel het kapitaal groeit wanneer je de rentebijschrijving ieder halfjaar, iedere maand, of iedere dag laat doen. Voor een dergelijk leerproces moet de leerling een werkblad met gerichte vragen hebben.
Maar er is met dit programma meer te doen. De



namen bij de invoer variabelen suggereren dat het over geld gaat. Maar ook de groei van een bacteriekolonie die zich per 20 minuten verdubbelt kan er mee doorgerekend worden. Je moet dan wel nadenken over het in te voeren percentage. Je kapitaal kan ook het aantal vierkante kilometers tropisch regenwoud zijn dat de wereld (nog) rijk is en waarvan per jaar 6% wordt gekapt. Met enige aanpassing van het programma kan de leerling aan de weet komen wanneer de helft van dit kapitaal is verdwenen.
Daarmee worden problemen uit verschillende contexten onder één noemer gebracht, het zijn allemaal groeiproblemen, ze zijn met eenzelfde wiskundig model te beschrijven.
Bij dat wiskundig model zullen exponentiële functies aan de orde komen. Een grafiek is een visuele ondersteuning van het algebraisch gegeven model. Spelen met functies en grafieken zijn met bord en krijt, pen en papier tijdrovende bezigheden. Een computer kan hulp bieden bij het tekenwerk. Dat zal het inzicht in de functievoorschriften verbeteren. Het volgende programma is een inkijkprogramma voor het tekenen van functies. Professionele grafieken-programma's kunnen veel meer, maar dit programma heeft ook zijn didactische waarde.

```
10  REM tekenen van grafiek van een functie
20    GOSUB 200: REM lees functievoor-
                     schrift, domein
                     en bereik
30    GOSUB 300: REM maak tekenscherm
                     in orde
40    FOR X = XLINKS TO XRECHTS
                     STEP STAP
50      GOSUB 700: REM teken volgend lijn-
                     stuk van de grafiek
70    NEXT X
80    GOSUB 800: REM sluit af
90  END

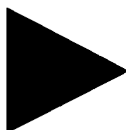
200 REM lees functievoorschrift, domein
          en bereik
210   DEF FNF (X) = 2 ∧ X
220   LET XLINKS = -10
225   LET XRECHTS = 10
230   LET YONDER = -10
235   LET YBOVEN = 1000
240   LET STAP = 0.1
290 RETURN

300 REM maak tekenscherm in orde
310   CLS: KEY OFF
320   SCREEN 2: REM kiezen voor teken-
                     scherm
330   WINDOW (XLINKS, YONDER) –
              (XRECHTS, YBOVEN)
340   LINE (XLINKS,0) – (XRECHTS, 0):
      REM tekenen van de X-as
350   LINE (0,YONDER) – (0,YBOVEN):
      REM tekenen van de Y-as
390 RETURN

700 REM teken volgend lijnstuk van de grafiek
710   LET X1 = X: LET X2 = X + STAP
720   LINE (X1, FNF (X1)) – (X2, FNF (X2))
790 RETURN

800 REM sluit af
810   LOCATE 24,1
820   PRINT "druk op de spatiebalk. ";
830   LET TOETS$ = " "
840   WHILE TOETS$ <> " "
850     LET TOETS$ = INKEY$
860   WEND
870   SCREEN 0: REM kiezen voor tekst-
                     scherm
880   KEY ON
890 RETURN
```

Bij dit programma hoeft een leerling helemaal niet te weten hoe bijvoorbeeld het window-commando in elkaar steekt. De enige subroutine waarin de leerling moet kunnen lezen en veranderen is subroutine 200: "lees functievoorschrift, domein en bereik", maar daar zit ook datgene in waar het in deze wiskundeles op aankomt.



Mededeling

Vakantiecursus 1989

De vakantiecursus 1989 voor leraren in de exacte vakken en andere belangstellenden wordt in Eindhoven gegeven op 17 en 18 augustus en in Amsterdam op 1 en 2 september. Het thema van de cursus is: Geschiedenis van de wiskunde in de 17e eeuw.

Programma
Dag 1:
A.W. Grootendorst (TU Delft): *Overzicht van de Wiskunde beoefening in de 17e eeuw.*
J. A. van Maanen (RU Utrecht): *Tien wiskundige problemen uit de 17e eeuw.*
J. A. van Maanen (RU Utrecht): *Mathematische Oeffeninghen.*
H. J. M. Bos (RU Utrecht): Descartes en het begin van de Analytische Meetkunde.
Dag 2:
C. de Pater (Inst. Gesch. Nat. Wetenschappen): *De relatie tussen de natuurwetenschappen en de wiskunde in de 17e eeuw.*
J. P. Hogendijk (RU Utrecht): *Het werk van Desargues.*
H. J. M. Bos (RU Utrecht): Becommentariëring van geselecteerde video-films van de Engelse Open University.

In Eindhoven wordt de cursus gegeven in het Rekencentrum van de Technische Universiteit (aanvang op beide dagen: 10.00 uur).
In Amsterdam wordt de cursus gegeven in het gebouw van de Stichting Mathematisch Centrum (aanvang vrijdag 1 september: 15.00 uur, zaterdag 2 september: 10.00 uur).
De kosten voor deelname aan de cursus bedragen *f*75,–, exclusief maaltijden.
Nadere inlichtingen zijn te verkrijgen bij: Frans Snijders, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam, tel. 020-5924171.

▶ De 27e Nederlandse Wiskunde Olympiade 1988

H. N. Schuring



De eerste ronde

Op vrijdag 11 maart 1988 is de eerste ronde gespeeld. Aan alle scholen voor havo en vwo is verzocht leerlingen van niet eindexamenklassen in de gelegenheid te stellen hieraan mee te doen. Gedurende drie uur konden de deelnemers proberen 13 opgaven op te lossen. Alleen goede antwoorden telden mee. Het maximaal te behalen puntenaantal was 36.
De wedstrijdleiders van 244 scholen hebben het resultatenformulier tijdig opgestuurd, zodat het resultaat van 2134 deelnemers in het volgende overzicht verwerkt kon worden.
De cesuur is gelegd bij score 21, wat zeggen wil dat deelnemers die 21 of meer punten behaalden, werden uitgenodigd voor de tweede ronde.

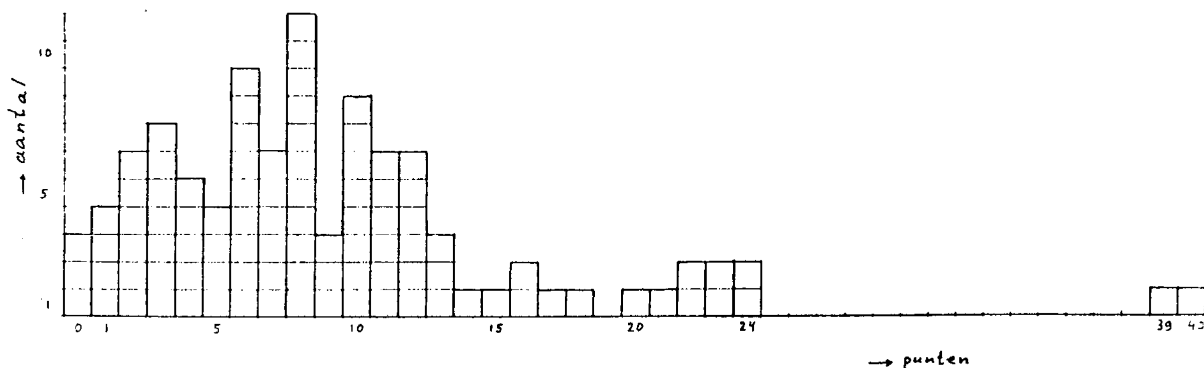
score	frequentie	cumulatieve frequentie	score	frequentie	cumulatieve frequentie
36	1	1	18	20	158
35	0	1	17	41	199
34	1	2	16	33	232
33	2	4	15	50	282
32	1	5	14	69	351
31	2	7	13	59	410
30	2	9	12	66	476
29	4	13	11	73	549
28	2	15	10	99	648
27	6	21	9	105	753
26	5	26	8	121	874
25	15	41	7	137	1011
24	8	49	6	112	1123
23	9	58	5	173	1296
22	9	67	4	141	1437
21	27	94	3	112	1549
cesuur			2	263	1812
20	11	105	1	5	1817
19	33	138	0	317	2134

De speciale prijs door de Staatssecretaris ingesteld voor de school waarvan de som van de scores van de beste drie deelnemende meisjes de hoogste is van alle scholen is gewonnen door twee scholen: het Christelijk Lyceum te Alphen aan de Rijn en het Liemers College te Zevenaar. Voor beide scholen behaalden de drie meisjes samen 51 punten.
De Shell wisselprijs voor de school met het hoogste puntentotaal van de beste vijf deelnemers van die school is gewonnen door het Elzendaalcollege te Boxmeer. De vijf deelnemers behaalden samen 114 punten.
Doordat vier deelnemers aan de Pythagoras Olympiade ook in aanmerking kwamen om aan de tweede ronde mee te doen, zijn 98 leerlingen hiervoor uitgenodigd.

De tweede ronde

Op 9 september 1988 is in Eindhoven de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade gehouden. Van de 98 uitgenodigde leerlingen hebben er 97 deelgenomen. Ze hadden drie uur de tijd om vier opgaven op te lossen. De maximale score per opgave was tien punten.
Door bij gelijke eindscore rekening te houden met het behaalde puntenaantal in de eerste ronde, zijn de volgende tien deelnemers prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1988:

	2° ronde	1° ronde
1. Marco Vervoort, Amsterdam	40 punten	36 punten
2. M.S.L. du Croo de Jongh, Gorssel	39 punten	27 punten
3. Arthur Bakker, Bergen	24 punten	27 punten
4. Piet Brouwer, Rotterdam	24 punten	24 punten
5. Paul de Feyter, Zeist	23 punten	25 punten
6. Gerton Lunter, Sneek	23 punten	Pythagoras
7. Raimondo Eggink, Wijchen	22 punten	27 punten
8. Peter Markusse, Dordrecht	22 punten	26 punten
9. Matijs van Zuijlen, Amsterdam	21 punten	21 punten
10. Alex Heinis, Beverwijk	20 punten	34 punten



Het bovenstaande staafdiagram geeft een overzicht van de scores van alle deelnemers aan de tweede ronde.

Opgaven tweede ronde

1 Gegeven zijn reële getallen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en a_0, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ met de eigenschap dat $(x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_n) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + + \ldots + a_1 x + a_0$ voor alle reële getallen x. Verder geldt dat $x_i \neq 0$ voor alle i.
Druk $x_1^{-2} + x_2^{-2} + \ldots\ldots + x_n^{-2}$ uit in $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

2 Gegeven is een getal α met $0 \leq \alpha \leq \pi$.
Men definieert een rij $c_0, c_1, c_2, \ldots\ldots$ door

$$c_0 = \cos \alpha,$$
$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + c_n}{2}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Bepaal $\lim\limits_{n \to \infty} 2^{2n+1}(1 - c_n)$.

3 Gegeven zijn drie reële getallen a, b, c met de eigenschap dat

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}.$$

Bewijs dat voor alle positieve oneven getallen n geldt dat

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}.$$

4 Gegeven is een gelijkbenige driehoek ABC met $AB = 2$ en $AC = BC = 3$. Men beschouwt vierkanten waarvoor geldt dat A, B en C op de zijden van het vierkant liggen (en dus niet op het verlengde van zo'n zijde).
Bepaal de maximale en de minimale waarde van de oppervlakte van zo'n vierkant. Motiveer je antwoord.

Oplossingen opgaven tweede ronde

1 Uitwerken van het linkerlid en gelijkstellen van de coëfficiënten links en rechts geeft

$$(-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n = a_0$$
$$(-1)^{n-1}(x_2 x_3 \ldots x_n + \ldots\ldots + x_1 x_2 \ldots x_{n-1}) = a_1$$

(de termen van de som ontstaan door in het produkt $x_1 x_2 \ldots x_n$ telkens één factor weg te laten)

$$(-1)^{n-2}(x_3 x_4 \ldots x_n + \ldots\ldots + x_1 x_2 \ldots x_{n-2}) = a_2$$

(telkens *twee* factoren weglaten).
Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} a_1^2 &= (x_2 \ldots x_n)^2 + \ldots\ldots + (x_1 \ldots x_{n-1})^2 + \\ &+ 2 x_1 x_2 \ldots x_n (x_3 \ldots x_n + \ldots\ldots + x_1 \ldots x_{n-2}) = \\ &= (x_2 \ldots x_n)^2 + \ldots\ldots + (x_1 \ldots x_{n-1})^2 + 2a_0 a_2 \end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned} x_1^{-2} + \ldots\ldots + x_n^{-2} &= (x_1 \ldots x_n)^{-2}\{(x_2 \ldots x_n)^2 + \\ &+ \ldots\ldots + (x_1 \ldots x_{n-1})^2\} = a_0^{-2}(a_1^2 - 2a_0 a_2). \end{aligned}$$

2 Aangezien $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, geldt
$\frac{1+\cos 2x}{2} = \cos^2 x$, dus uit $c_0 = \cos\alpha$ volgt
$c_1 = \cos\alpha/2$, $c_2 = \cos\alpha/4, \ldots\ldots$ en in het algemeen
$c_n = \cos\alpha/2^n$.
Wegens $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$ geldt
$1 - c_n = 2\sin^2(\alpha/2^{n+1})$

dus

$$2^{2n+1}(1-c_n) = 2^{2n+2}\sin^2(\alpha/2^{n+1}) = \alpha^2\left(\frac{\sin(\alpha/2^{n+1})}{\alpha/2^{n+1}}\right)^2$$

en wegens $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ is de gevraagde limiet gelijk aan α^2.

3 Het is onmogelijk dat de drie getallen a, b en c gelijk van teken zijn, want de absolute waarde van het rechterlid zou dan kleiner zijn dan die van elk van de termen links. Zonder beperking van de algemeenheid kunnen we dus aannemen dat a en b groter dan nul zijn, en dat c kleiner dan nul is (eventueel herbenoemen en de tekens omklappen). Noem $d = -c$, dan geldt dus $a, b, d > 0$ en

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{d} + \frac{1}{a+b-d}$$

$$(a+b)\cdot d\cdot(a+b-d) = (a+b)\cdot a\cdot b$$

dus wegens $a + b > 0$

$$d\cdot a + d\cdot b - d^2 - a\cdot b = 0$$
$$(a-d)(d-b) = 0.$$

Conclusie: $a = d$ of $b = d$, d.w.z. $a = -c$ of $b = -c$. Voor oneven n is de gevraagde gelijkheid nu vanzelfsprekend.

4 Stel l is de zijde van het vierkant die door C gaat. Draai l vanuit de symmetrische positie van figuur 1 tegen de klok in. Via figuur 2 wordt dan op zeker moment figuur 3 bereikt, waarin C samenvalt met een hoekpunt van het vierkant. Verder draaien zou tot gevolg hebben dat A of B 'los komt'. De figuren 1 en 3 zijn dus 'extreme' situaties. We berekenen eerst de lengte van de zijden van het vierkant in deze gevallen.
In figuur 1 is die lengte $2\sqrt{2}$, dus de oppervlakte is dan 8.
In figuur 3 geldt

$$3\cos\varphi = 3\cos(\pi/2 - \varphi - 2\gamma),$$

waarbij

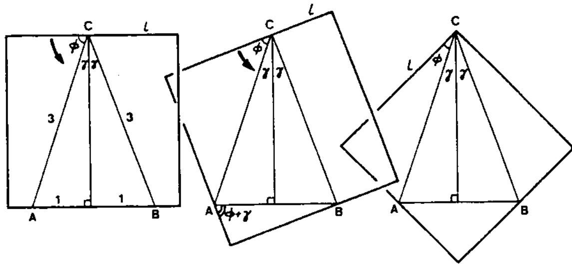
$$\sin\gamma = 1/3.$$

Hieruit volgt

$$\varphi = \pi/2 - \varphi - 2\gamma$$

dus

$$\varphi = \pi/4 - \gamma.$$



Figuur 1 *Figuur 2* *Figuur 3*

(Dit betekent overigens dat het vierkant in figuur 3 *symmetrisch* om de driehoek heen ligt.) De lengte van de zijde is dan gelijk aan

$$3\cos\varphi = 3\cos(\pi/4 - \gamma) =$$
$$= 3\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos\gamma + 3\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sin\gamma =$$
$$= 3\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{2}{3}\sqrt{2} + 3\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{3} = 2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

en de oppervlakte is $4\frac{1}{2} + 2\sqrt{2} = 7{,}328\ldots$

In figuur 2, tenslotte, is de lengte van de zijde gelijk aan

$$L = 3\sin\varphi + 2\cos(\varphi + \gamma) =$$
$$= 3\sin\varphi + 2\cos\varphi\cos\gamma - 2\sin\varphi\sin\gamma =$$
$$= 3\sin\varphi + 2(\cos\varphi)\tfrac{2}{3}\sqrt{2} - 2(\sin\varphi)\tfrac{1}{3} =$$
$$= \tfrac{7}{3}\sin\varphi + \tfrac{4}{3}\sqrt{2}\cos\varphi = 3\cos(\varphi - \omega)$$

waarbij de hoek ω voldoet aan $\sin\omega = \frac{7}{9}$ en $\cos\omega = \frac{4}{9}\sqrt{2}$.
Deze hoek ligt binnen het gebied dat φ bestrijkt op weg van figuur 1 naar figuur 3. Voor $\varphi = \omega$ geldt in dat geval $L = 3$ en de oppervlakte van het vierkant is dan 9, de maximale waarde. De minimale waarde is die van figuur 3, dus $4\frac{1}{2} + 2\sqrt{2}$.

Boekbespreking

Johnson, R. M.: *Calculus*; £ 14.95; 333 blz. en Stirling, D.S.G.: *Mathematical Analysis*; £ 9.95; 172 blz. In: Ellis Horwood Series in Math. and its Appl.

Het betreft hier twee uitstekende leerboeken in de Analyse.
Het eerste behandelt ruwweg de analyse zoals we die kennen van het vwo: limieten, afgeleide functie, integralen, exponentiële en logaritmische functies, goniometrische en cyclometrische functies, rijen, differentiaalvergelijkingen.
De ondertitel 'Theory and applications in technology and the physical and life sciences' geeft al aan dat naast de helder geschreven theoriegedeelten veel aandacht wordt besteed aan toepassingen. Verder is ieder hoofdstuk voorzien van een opgavenset waarvan de antwoorden zijn opgenomen.
Het tweede boek begint met een drietal hoofdstukken waarin de noodzaak van het geven van bewijzen wordt beargumenteerd, de elementaire logica wordt behandeld en enkele standaard bewijsmethoden worden gepresenteerd.
Vervolgens komen op streng wiskundige wijze de onderwerpen limieten, reeksen, continuïteit, differentieerbaarheid, machtreeksen en integratie aan de orde. Uit deze opsomming blijkt al dat dit werk van een hoger niveau is dan het eerstgenoemde (vgl. met eerstejaars wiskunde).
Ook dit boek bevat aansluitend op ieder hoofdstuk een verzameling vraagstukken. In een afzonderlijke appendix worden hints voor en oplossingen van deze vraagstukken gegeven.

Harm Bakker

Verschenen

Usmani, R. A.: *Applied Linear Algebra*; Marcel Dekker; $47.50; 219 blz.
De auteur heeft geprobeerd een cursus Lineaire Algebra te schrijven waarin die onderwerpen aan de orde komen die in toepassingen regelmatig worden gebruikt. Het resultaat is een boek dat in opzet en ordening nogal afwijkt van de traditionele leerboeken Lineaire Algebra.

Jeter, M. W.: *Mathematical Programming*; Marcel Dekker; $41.25; 360 blz.
Uitgaande van enige elementaire kennis van de lineaire algebra en analyse behandelt dit boek de basisbegrippen uit de mathematische (i.h.b. de lineaire) programmering. Optimaliseringsproblemen uit diverse toepassingsgebieden worden gebruikt als leidraad om de algemene theorie op te bouwen. Het boek bevat een groot aantal opgaven.

● Verenigingsnieuws ●

▶ Jaarvergadering/ Studiedag 1989

Eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 1989 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 28 oktober 1989 in het gebouw van: **Het Nieuwe Lyceum**, Jan Steenlaan 38, 3723 BV Bilthoven, 030 - 78 30 60. Aanvang 10.00 uur.

Agenda:

9.30 - 10.00 uur: Aankomst, koffie
10.00 - 10.30 uur: **Huishoudelijk Gedeelte**

a. Opening door de voorzitter, dr. Th. J. Korthagen.
b. Notulen van de jaarvergadering 1988 (zie Euclides nr. 8).
c. Jaarverslagen (zie Euclides).
d. Decharge van de penningmeester en benoeming van een nieuwe kascommissie.
   Het bestuur stelt kandidaat *):
   T. Vandeberg, Kerkrade en drs. H. Verhage, Utrecht.
e. Bestuursverkiezing in verband met het periodiek aftreden van L. Jacobs, dr. Th. J. Korthagen en F. J. Mahieu.
   De heren Jacobs en Korthagen stellen zich niet herkiesbaar. Het bestuur stelt kandidaat *):
   J. J. Breeman, J. F. D. Diepstraten en F. J. Mahieu.
f. Vaststelling van de contributie 1990/1991. Het bestuur stelt voor de contributie vast te stellen op *f* 55,–.

10.30 - 15.30 uur: **Themagedeelte** (studiedag)
15.30 - 16.00 uur: **Huishoudelijk Gedeelte**

g. Rondvraag.

De nieuwe bestuurskandidaten:

Jan Breeman
Hij werd geboren in 1940.
Hij behaalde na een studie aan de Nutsacademie te Rotterdam de akte MOB-wiskunde.
Hij is docent wiskunde aan de Samenwerkingsschool havo/atheneum te Waddinxveen.
Reeds voor de invoering van het Hewet programma werkte hij in de vierde klas van het atheneum met een programma toegepaste wiskunde.

Hans Diepstraten
Hij werd geboren in 1945.
Hij behaalde na een studie aan de Rijksuniversiteit te Utrecht de akte MBO-wiskunde.
Hij is docent wiskunde aan het Montessori-lyceum Herman Jordan te Zeist.
Hij is mede-auteur geweest van de wiskundeleergang "Van A tot Z".

Programma Studiedag

Het programma van de studiedag heeft als titel: *Begeleiden, motiveren en adviseren in de wiskundeles.*
Meer informatie over de studiedag en informatie over de wijze van aanmelden kunt u vinden in Euclides jaargang 65 nr. 1. Deze aflevering verschijnt in september 1989.

*) Tot achtentwintig dagen na het verschijnen van deze oproep kunnen eveneens personen schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden.

▶ Van de bestuurstafel

Agneta Aukema-Schepel

Bijeenkomsten

Dit voorjaar stond duidelijk in het teken van direct contact met leden en hopelijk toekomstige leden. Allereerst waren daar de HAWEX-voorlichtingsbijeenkomsten op de drie proefscholen, met totaal

rond 280 deelnemers; daarna de vijf regionale hoorzittingen over de Eindtermen basisvorming wiskunde, waarbij ruim 300 mensen gebruik maakten van de mogelijkheid tot inspraak in het nieuwe programma, en tenslotte de diverse examenbesprekingen. Als bestuur trachten we dergelijke bijeenkomsten zo goed mogelijk te organiseren, waarbij het spannend blijft hoeveel liefhebbers er voor welke bijeenkomst zullen zijn. Op de HAWEX-school in Dokkum waren dat er 58; de 90 'insprekers' in Zwolle pasten niet meer in de school, ieder die zich tijdig opgegeven had, kreeg bericht van de nieuwe plek (daarom is opgeven noodzakelijk!). Wij zijn erg blij met de prima samenwerking met de mensen van de VALO en het SIO-project. Alle gegevens van de vijf hoorzittingen zijn verzameld en doorgegeven aan de eindtermenontwerpers. Uit de besprekingen bleek eens te meer de diversiteit van de groepen waaraan en de manieren waarop wij lesgeven, en dus ook van onze wensen...

Scores bij examens vermelden?

Een discussiepunt blijft de vraag of wij bij de examenopgaven de maximale score per vraag vermeld zouden willen zien. Dit zou de kandidaten meer duidelijkheid geven, maar misschien ook meer zenuwen. Bij het VWO A examen in 1988 bijvoorbeeld, kon iemand 61% van de vragen goed beantwoorden en toch maar 41% scoren. Laat ons eens weten hoe u hierover denkt!

Vakkenvolgorde op het examen

Inmiddels is bekend dat in 1990, net als in 1988, wiskunde A weer op de laatste algemene examendag staat. Vorig jaar meldden wij reeds aan de wiskundesectie van de CEVO dat de korte tijd die voor het corrigeren rest een bezwaar is, omdat het tot kwaliteitsverlies van de correctie kan leiden. Wij hebben het bestuur van de CEVO nu uitdrukkelijk gevraagd hier rekening mee te houden.

Na de vakantie krijgt u het verslag van onze jaarlijkse vergadering met de inspecteurs.
Maar nu eerst een prettige vakantie!

● Actualiteit ● ● ● ●

► Gehoord

M. C. van Hoorn

Dit stukje gaat over de hoorzitting over de eindtermen wiskunde voor de basisvorming die te Zwolle gehouden werd.
De Staatssecretaris vond van de eerder opgestelde eindtermen wiskunde, dat deze niet concreet genoeg waren, en dat de keuze voor drie niveaus (in plaats van twee) niet acceptabel was.
Wat het laatste betreft: het leek erop dat een meerderheid van de aanwezige wiskundeleraren en -leraressen liever méér dan minder niveaus aangegeven zag.
Concretisatie van zekere eindtermen (zoals: '*Handelen aan mentale voorstellingen van ruimtelijke figuren als balk, kubus, enz.*') bleef tijdens de Zwolse hoorzitting vooralsnog een vrome wens. Dit kwam mede, doordat vóór de pauze aandacht werd gevraagd door het SIO-project (SIO = Scholen in Ontwikkeling). Enige uitleg over de rol van het SIO-project ten aanzien van de eindtermen was zeker op zijn plaats geweest!
Na de pauze bleek, althans in de sub-bijeenkomst die ik meemaakte, dat de eindtermencommissie inmiddels overweegt om de tweedegraads functies uit het onderbouw-programma te verwijderen. En nog wel iets meer ook. Niet iedereen bleek dat te begrijpen, mede gezien de wiskunde die in de tweede fase (bovenbouw, Mbo) voorkomt.
De aanwezige vertegenwoordigers van de eindtermencommissie hebben àlles wat ze hoorden opgeschreven. 't Was immers een hoorzitting.

▶ Newtons benadering van $\sqrt{2}$

De benaderingsmethode van Newton voor nulpunten van differentieerbare functies loopt als volgt. Laat x_1 een (ruwe) benadering zijn van een zekere oplossing van $f(x) = 0$,
$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$, enzovoort.

Nu benadert de rij $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ het gezochte nulpunt.
Als $f(x) = x^2 - 2$ en de startwaarde x_1 is positief, dan wordt aldus het positieve nulpunt van f benaderd, $\sqrt{2}$ derhalve.

```
20  CLS
30 PRINT "Dit programma berekent wortel 2 d.m.v. Newton's"
40 PRINT "methode om een nulpunt te vinden"
50 INPUT "Geef een startwaarde:   ",X
60 INPUT "Stopcriterium:  ",E :PRINT
70 DX = 100
80 WHILE ABS(DX) > E
90    DX = (X^2-2)/(2*X)
100     X = X - DX
110     PRINT X
120 WEND
```

```
Dit programma berekent wortel 2 d.m.v. Newton's
methode om een nulpunt te vinden
Geef een startwaarde:   15
Stopcriterium:  0.01

 7.566667
 3.915492
 2.213142
 1.558417
 1.420885
 1.414229
Ok
```

● Recreatie ● ● ● ●

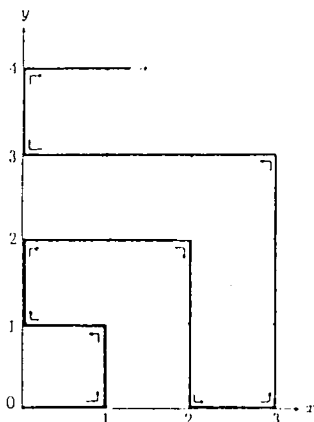
Correspondentie over deze rubriek aan
Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148,
6865 HN Doorwerth.

▶ Opgaven

De opgaven voor de tweede ronde van de Vlaamse Olympiade zijn in Euclides nooit gepubliceerd, omdat ze niet van specifiek Vlaams maar van Amerikaans origine zijn. Hier volgen een viertal opgaven uit de tweede ronde 1989. Voor de leerlingen zijn het multiple choice opgaven; voor leraren zijn de alternatieven weggelaten.

607. Zij x een reëel getal lukraak gekozen tussen 100 en 200. De kans dat x uit een deelinterval van [100, 200] gekozen wordt, is evenredig met de lengte van dit interval.
Bepaal de kans dat $E(\sqrt{100x}) = 120$, als je weet dat $E(\sqrt{x}) = 12$. ($E(v)$ staat voor het grootste geheel getal kleiner dan of gelijk aan v.)

608. Een deeltje beweegt doorheen het eerste kwadrant als volgt: het begint bij de oorsprong en verplaatst zich naar punt (1,0) tijdens de eerste minuut. Hierna beweegt het heen en weer tussen de positieve x-as en de positieve y-as, zoals in de figuur met behulp van de pijltjes aangegeven wordt. Hierbij legt het telkens 1 eenheid van afstand evenwijdig met een coördinaatas af in een tijdspanne van 1 minuut.



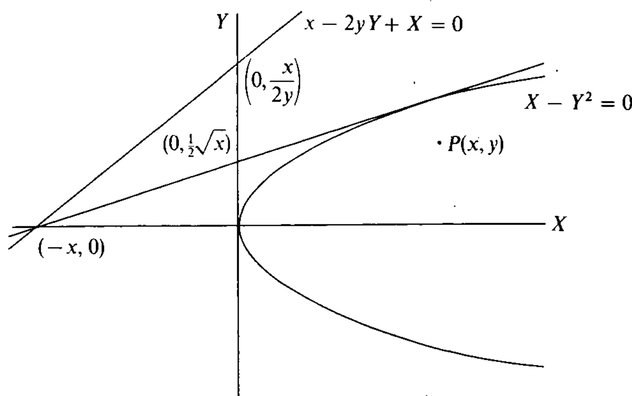
Bepaal het punt waar dit deeltje zal zijn aangekomen na precies 1989 minuten.

609. Vijf personen zitten aan een ronde tafel. Noteer $v \geq 0$ voor het aantal personen dat naast ten minste één vrouw zit en $m \geq 0$ voor het aantal personen dat naast ten minste één man zit. Bepaal het aantal mogelijke koppels (v,m).

610. Zij n een positief geheel getal. Als de vergelijking $2x + 2y + z = n$ 28 oplossingen heeft in gehele positieve getallen x, y en z, waaraan moet n dan gelijk zijn?

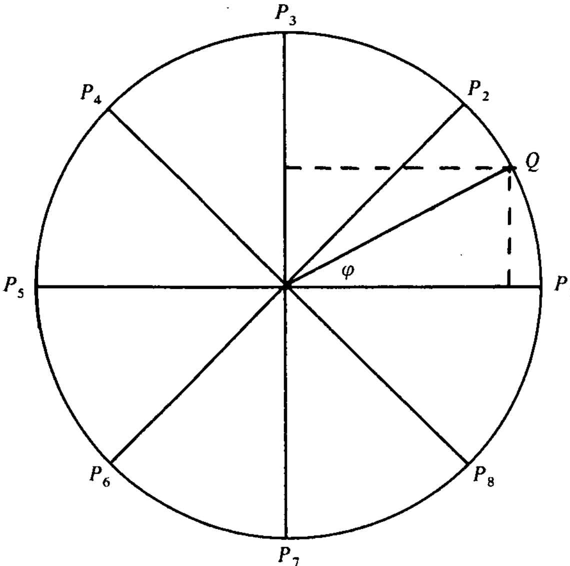
▶ Oplossingen

604. a, b, c, A, B, C zijn reëel. Bewijs dat
$aC - 2bB + cA = 0 \wedge ac - b^2 > 0 \Rightarrow AC - B^2 \leqq 0$
Stel
$\frac{a}{c} = x,\ \frac{b}{c} = y,\ \frac{A}{C} = X,\ \frac{B}{C} = Y$
(de gevallen $c = 0$ en $C = 0$ sluiten we voorlopig uit). We bewijzen:
$x - 2yY + X = 0 \wedge x - y^2 > 0 \Rightarrow X - Y^2 < 0$



In de grafiek is de parabool $X - Y^2 = 0$ getekend. $P(x, y)$ met $x - y^2 > 0$, is een punt binnen deze parabool.
We tekenen nu de lijn $x - 2yY + X = 0$. Deze snijdt de assen in $(-x, 0)$ en $\left(0, \frac{x}{2y}\right)$.
Verder trekken we door $(-x, 0)$ de raaklijn aan de parabool welke de Y-as snijdt in $(0, \frac{1}{2}\sqrt{x})$. Wegens $x - y^2 > 0$, is $\frac{x}{2y} > \frac{1}{2}\sqrt{x}$.
Dus ligt de lijn $x - 2yY + X = 0$ geheel buiten de parabool. Als dus voor een punt (X, Y) geldt $x - 2yY + X = 0$, dan ligt (X, Y) buiten de parabool en is inderdaad $X - Y^2 < 0$.
Het geval $AC - B^2 = 0$ kan optreden als $C = 0$.

605. $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ is een regelmatige achthoek. Het punt Q ligt op de omgeschreven cirkel. Bewijs dat de som van de vierdemachten van de afstanden van Q tot P_1P_5, P_2P_6, P_3P_7 en P_4P_8 onafhankelijk van de keuze van Q is.



We moeten bewijzen dat
$\sin^4\varphi + \cos^4\varphi + \sin^4(\varphi + \frac{1}{4}\pi) + \cos^4(\varphi + \frac{1}{4}\pi)$ onafhankelijk van φ is.
Nu is $\sin^4\varphi + \cos^4\varphi + \sin^4(\varphi + \frac{1}{4}\pi) + \cos^4(\varphi + \frac{1}{4}\pi) =$
$(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^2 + (\sin^2(\varphi + \frac{1}{4}\pi) + \cos^2(\varphi + \frac{1}{4}\pi))^2 -$
$- 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi - 2\sin^2(\varphi + \frac{1}{4}\pi)\cos^2(\varphi + \frac{1}{4}\pi) =$
$2 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi - \frac{1}{2}\sin^2(2\varphi + \frac{1}{2}\pi) = \frac{3}{2}$
en dit is onafhankelijk van φ.

606. Te bewijzen: $3^n + 1$ is niet deelbaar door 2^n voor $n > 1$.

Onderstel n is even. Dan is $3^n + 1 = 9^{\frac{1}{2}n} + 1$.

Omdat 9 een 8-voud + 1 is, is $9^{\frac{1}{2}n}$ eveneens een 8-voud + 1 en $9^{\frac{1}{2}n} + 1$ dus een 8-voud + 2. Dit bevat slechts één factor 2.

Onderstel n is oneven. Stel $n = 2m + 1$.
Dan is $3^n + 1 = 3^{2m+1} + 1 = 3 \cdot 9^m + 1 =$
$3(8\text{-voud} + 1) + 1 = 8\text{-voud} + 4$.
Dit bevat precies twee factoren 2.
In beide gevallen is het dus niet deelbaar door 2^n.

Antwoorden

Antwoorden Denkopgaven, verschenen in jaargang 64.

1a	161 cm²
1b	nee ($AC^2 = 4900$ en $PA^2 + PC^2 = 4900\frac{2}{9}$)
2a	106°
2b	ja, beide driehoeken zijn rechthoekig
3a	het $\frac{12}{49}$ deel
3b	ja, AQ = QP = PB = 65
4a	300 cm²
4b	ja ($\cos u = \cos v = \cos w = \frac{7}{8}$)
5a	het $\frac{1}{6}$ deel
5b	ja (de zijden zijn $19\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}\sqrt{105}$ en 12)
6a	4 cm
6b	$QR = QS = 9\sqrt{13}$; hoek x is recht ($RS = 9\sqrt{26}$)
7a	het $\frac{4}{15}$ deel
7b	ja, de lijnstukken gaan door één punt
8a	24 cm
8b	nee ($AP + PQ + QC \approx 153{,}0028$)
9a	20°
9b	nee

Kalender

27 t/m 30 juni 1989: Amsterdam, Zomercursus "Constructieve Methoden in de Fractale Meetkunde". Zie Euclides 64,8 blz. 252.
1, 2 en 3 juli 1989: Oostende, Zesde tweejaarlijks Congres VVWL. Zie Euclides 64,8 blz. 252.
17 en 18 augustus 1989: Eindhoven, Vakantiecursus 1989 "Geschiedenis van de Wiskunde in de 17e eeuw". Zie de mededeling op blz. 275 van dit nummer.
1 en 2 september 1989: Amsterdam, Vakantiecursus 1989 "Geschiedenis van de Wiskunde in de 17 e eeuw". Zie blz. 275 van dit nummer.
8 september 1989: Eindhoven, 1989: Eindhoven, Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade.
13 september 1989: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
29 en 30 september 1989: Noordwijkerhout, WIT Conferentie. Zie blz. 263 van dit nummer.
11 oktober 1989: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
28 oktober 1989: Bilthoven, Jaarvergadering/Studiedag NVvW. Zie de uitnodiging onder Verenigingsnieuws op blz. 280.

Inhoud

Adressen van auteurs

Mw. A. F. S. Aukema-Schepel,
Buitenplaats 77, 8212 AC Lelystad

B. van Etten, Herenberg 10, 5752 AG Deurne

C. P. Hoogland, Hasselaerplein 34, 2013 GC Haarlem

M. C. van Hoorn, Sloep 102, 9732 CE Groningen

G. Schoemaker, OW&OC, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht

H. N. Schuring, Van Heemstralaan 21, 6814 KB Arnhem

Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth